# *ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΚΟΙΝΩΝΙΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ*

## 1. Μια σύντομη ματιά στην ιστορία των μαθηματικών

Αντίθετα με το τι συνηθίζουν να πιστεύουν οι περισσότεροι ίσως άνθρωποι, η ιστορία των μαθηματικών είναι και ενδιαφέρουσα αλλά και εντυπωσιακή συνάμα. Η μεγαλειώδης μαθηματική επιστήμη αναπτύχθηκε από τον αγώνα και τις προσπάθειες των ανθρώπων να κατανοήσουν, να εξηγήσουν και ως ένα βαθμό να ελέγξουν τα γεγονότα που διαδραματίζονταν στον κόσμο που μας περιβάλλει. Άρχισε να αναπτύσσεται από τους αρχαίους προ-ελληνικούς ήδη χρόνους και συνεχίζει να εξελίσσεται με τρομακτικά γρήγορους ρυθμούς μέχρι σήμερα. Αλλά η μακρόχρονη αυτή εξέλιξή τους δεν ήταν ούτε ευθύγραμμη, ούτε έχει συμβεί χωρίς δυσκολίες, ατέλειες, εμπόδια και αντιθέσεις, οι οποίες μάλιστα επηρέασαν όλες τις πλευρές της ανθρώπινης ζωής, περιλαμβάνοντας τη θρησκεία, την πολιτική, τη φιλοσοφία και την επιστήμη γενικότερα. Πράγματι, αντιθέσεις και αμφισβητήσεις γύρω από τη φύση και τα θεμέλια των μαθηματικών υπάρχουν ακόμα και σήμερα*.

Προξενεί ειρωνεία ίσως το γεγονός ότι ενώ τα μαθηματικά είναι ένα απαραίτητο στοιχείο στην εκπαιδευτική μας δομή, εμείς οι δάσκαλοι δεν ενδιαφερόμαστε σχεδόν καθόλου για τις ιστορικές τους πλευρές, αλλά ούτε και ασχολούμαστε με την ιστορία ανάπτυξης και εξέλιξής τους. Αν μη τι άλλο, μια σύντομη μελέτη της ανάπτυξης της μαθηματικής σκέψης θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη και θα βοηθούσε σημαντικά δασκάλους και μαθητές στο να συνειδητοποιήσουν ότι τα μαθηματικά είναι πράγματι ένα από τα μεγαλύτερα, ίσως το μεγαλύτερο, ανθρώπινο επίτευγμα, το οποίο έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση της σημερινής κοινωνίας. Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να δώσει μια σύντομη περιγραφή της ιστορίας των μαθηματικών και της μαθηματικής εκπαίδευσης με την ελπί-

* Βλέπε Κεφάλαιο 2.

δα ότι ο αναγνώστης θα παρακινηθεί να αναζητήσει επιπρόσθετες και πιο λεπτομερείς πηγές πάνω σ' αυτό το θέμα*.

## 1.1 Πρωτόγονη μαθηματική σκέψη

Συχνά λέγεται ότι ο κόσμος των μαθηματικών είναι ένας κόσμος ο οποίος έχει αναπτυχθεί ανεξάρτητα από την ιστορία των εθνών. Αν και αυτή η άποψη απαιτεί πολλή συζήτηση, σε οποιαδήποτε περίπτωση αυτό που μπορούμε να πούμε με σιγουριά είναι ότι από την πρώτη κιόλας μέρα της δημιουργίας τους έχουν συμβάλει καθοριστικά στη δημιουργία των σημερινών συνθηκών ζωής και, επομένως, αποτελούν ένα πρώτιστο πολιτιστικό φαινόμενο με μια σπουδαία τεχνολογική διάσταση (White 1959, Wilder 1981).

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την ιδέα της αρίθμησης ή της μέτρησης ή της σχεδίασης. Μεταξύ των πρωτόγονων λαών – όπως αποδεικνύουν ορισμένες πρόσφατες μελέτες – η ιδέα του αριθμού υπήρχε ως αντιστοιχία. Ο πρωτόγονος άνθρωπος χρειαζόταν τους αριθμούς, τουλάχιστον τους πρώτους ακέραιους (κάποιες φυλές δεν μετρούν πάνω από το 20), για να μετρήσει εκείνη ή την άλλη κατηγορία αντικειμένων. Με αυτό τον τρόπο, μπορούσε να διεκπεραιώσει τις καθημερινές του εμπορικές συναλλαγές, χρησιμοποιώντας διάφορα αντικείμενα ως σύμβολα μέτρησης (Harris 1980, Zaslavsky 1973, Gay και Cole 1967). Επίσης η εξερεύνηση του περιβάλλοντος και του γύρω χώρου, καθώς επίσης και η συνειδητοποίηση και συμβολική αναπαράσταση αυτού του περιβάλλοντος με μοντέλα, διαγράμματα, σχεδιαγράμματα, εικόνες, λέξεις ή άλλα μέσα, παρατηρείται και στους πιο πρωτόγονους λαούς (Pinxten et al. 1983, Harris 1980).

## 1.2 Οι πρώτοι αρχαίοι πολιτισμοί

Οι Αιγύπτιοι ήταν ο πρώτος λαός για τον οποίο μπορούμε να πούμε ότι ασχολήθηκε με τη μαθηματική επιστήμη. Οι Αιγύπτιοι ήταν αναγκασμένοι να επινοούν τρόπους για να μετρούν και να οριοθετούν τη γη τους μετά από κάθε μεγάλη πλημμύρα του ποταμού Νείλου και να χρησιμοποιούν μαθηματικές γνώσεις για να κατασκευάζουν τα τεράστια οικοδομήματά τους, που προσέδιδαν κύρος και αίγλη στο καθεστώς τους. Οι Αιγύπτιοι, μπορούμε να πούμε, ήταν οι πρώτοι μαθηματικοί στην ιστορία της ανθρω-

* Βλέπε, για παράδειγμα, τρία πολύ καλά βιβλία, μεταφρασμένα στα Ελληνικά, των L. Bunt κ.ά. (1981), M. Kline (χ.χ.) και D. Struik (1982).

πότητας. Κατείχαν τους πρώτους μαθηματικούς νόμους και γνώριζαν πώς να χειρίζονται τους αριθμούς και τα γεωμετρικά σχήματα· αλλά, απ' ό,τι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε μέχρι σήμερα, οι σκοποί τους οποίους επιδίωκαν ήταν χρησιμοθηρικοί και εντελώς πρακτικοί. Δεν φαίνεται να είχαν σχηματίσει την ιδέα της θεωρητικής επιστήμης, του επιστημονικού ιδεώδους.

Παρ' όλα αυτά, η μελέτη των αιγυπτιακών μαθηματικών παπύρων μάς αποκαλύπτει ενδιαφέροντα πράγματα. Βρίσκουμε εκεί αριθμητικά προβλήματα τα οποία απαιτούν μια σημαντική λογική ικανότητα όπως, για παράδειγμα, η διαδικασία επίλυσης μιας αλγεβρικής εξίσωσης Β΄ βαθμού ή ο ακριβής υπολογισμός του όγκου μιας κόλουρης πυραμίδας με τετραγωνική βάση. Βεβαίως, τα προβλήματα που περισώθηκαν στους παπύρους ασχολούνται με πολύ ειδικές και συγκεκριμένες περιπτώσεις, αλλά, ωστόσο, θα πρέπει να επισημάνουμε και το γεγονός ότι έχουμε στην κατοχή μας πολύ λίγα ντοκουμέντα για να αξιολογήσουμε πιο σοβαρά και ολοκληρωμένα την ποιότητα και το επίπεδο των μαθηματικών τους γνώσεων. Οπωσδήποτε πάντως, είναι λογικό να συμπεράνει κανείς ότι οι Αιγύπτιοι έπρεπε να έχουν αναπτύξει κάποιες γενικές ιδέες και θεωρίες που καθοδηγούσαν την ανάπτυξη αυτών των τόσο πολύπλοκων τύπων, οι οποίοι σήμερα μας φαίνονται ξεκρέμαστοι και μας δίνουν την εντύπωση ότι λειτουργούσαν ως συνταγές που εξυπηρετούσαν συγκεκριμένους πρακτικούς κατά περίπτωση σκοπούς.

Τα ίδια ισχύουν και για τους αρχαίους Βαβυλωνίους. Σώζονται ντοκουμέντα που μας περιγράφουν τη λύση προβλημάτων, τα οποία καταλήγουν σε εξισώσεις Β΄ βαθμού, οι οποίες λύνονται κατά περίπτωση χωρίς να διαφαίνεται κάποιο ενδιαφέρον για συστηματοποίηση όλων αυτών των περιπτώσεων. Σ' αυτούς τους πρώτους, αναμφισβήτητα μεγάλους, πολιτισμούς, η ποικιλία των παρατηρούμενων φυσικών φαινομένων και το μυστήριο της ανθρώπινης ύπαρξης και του ανθρώπινου πεπρωμένου, θεωρούνταν ότι βρίσκονταν κάτω από τον έλεγχο των διαφόρων θεοτήτων. Χρειάστηκε να φθάσουμε στην εποχή του κλασικισμού (600-300 π.Χ.) για να αναγνωριστεί από τους αρχαίους Έλληνες ότι τα ανθρώπινα όντα είναι προικισμένα από τη φύση με μια διάνοια, η οποία, μέσω της παρατήρησης και του πειράματος, μπορεί να ανακαλύψει αλήθειες.

## 1.3 Το αρχαίο ελληνικό θαύμα

Παρ' όλο το ενδιαφέρον που παρουσιάζει η μελέτη όλων αυτών των αποσπασματικών μαθηματικών γνώσεων, δεν μπορούμε να μιλάμε ακόμη για μαθηματική επιστήμη με τη σημερινή σημασία του όρου. Η μαθηματική επιστήμη άρχισε να δημιουργείται κατά τους αρχαίους ελληνικούς κλασικούς χρόνους. Οι αρχαίοι Έλληνες τόλμησαν να κοιτάξουν τη φύση κατάματα και κατάφεραν να αναπτύξουν μια αξιοθαύμαστη συλλογιστική με την οποία εξήγησαν τις κινήσεις του ήλιου, της σελήνης, των πλανητών και τη γενική κατάσταση του σύμπαντος. Κατά τη διάρκεια αυτής της περιόδου, το μεγαλύτερο μέρος της μυθολογίας, η οποία είχε προέλθει από την αντίληψη ότι οι θεοί κυβερνούν το φυσικό κόσμο, άρχισε να καταρρέει. Ο Πλάτων, ο Αριστοτέλης, ο Πυθαγόρας, ο Ευκλείδης και άλλοι μεγάλοι στοχαστές, ανέπτυξαν και προώθησαν τη θέση ότι ο κόσμος είχε σχεδιαστεί αρμονικά με μαθηματικό τρόπο και ότι οι ανθρώπινες λογικές δυνάμεις μπορούσαν να μελετήσουν αυτή την αρμονία.

Όλοι οι ιστορικοί της επιστήμης μιλούν για το «Ελληνικό θαύμα», οποιαδήποτε και αν είναι η γνώμη τους για τη συνεισφορά των Ανατολικών λαών στα Ελληγικά μαθηματικά. Πράγματι, είναι βέβαιο ότι οι αρχαίοι Έλληνες δεν δημιούργησαν τα πάντα μέσα από το μυαλό τους, αλλά επηρεάστηκαν και δανείστηκαν πολλές γνώσεις από τους Αιγυπτίους και τους άλλους πολιτισμούς της Ανατολής. Οι Έλληνες ήταν μεγάλοι έμποροι και ταξίδευαν απ' άκρη σ' άκρη σε όλο σχεδόν τον τότε γνωστό κόσμο. Ο Πυθαγόρας, ο Πλάτων και πολλοί άλλοι είχαν ταξιδέψει στην Ανατολή και την Ασία. Ο Δημόκριτος είχε μαθητεύσει κοντά σε μεγάλους δασκάλους της Ανατολής, όπως εξάλλου και ο Πυθαγόρας. Στα κεφάλια όλων αυτών των μεγάλων στοχαστών αναπτύχθηκαν για πρώτη φορά οι έννοιες της αφαίρεσης, της γενίκευσης, της ανάλυσης και της σύνθεσης. Όλες αυτές οι γενικές διαδικασίες της σκέψης με τις οποίες ήταν προικισμένο το ανθρώπινο μυαλό, χωρίς να τις έχει συνειδητοποιήσει κανείς άλλος μέχρι τότε, θα μπουν από εκείνη τη στιγμή στην υπηρεσία της ανθρώπινης σκέψης.

Για τους αρχαίους Έλληνες οι μαθηματικές ιδέες ήταν καθαρά αφηρημένες. Οι θεμελιώδεις έννοιες ήταν ο αριθμός και η μορφή. Ο ακέραιος αριθμός ήταν ένα κατασκεύασμα του μυαλού, μια «ιδέα» κατά την πλατωνική ονομασία του όρου. Όσο για τη μορφή, είναι γνωστό με τι επιμονή ο Πλάτων και ο Αριστοτέλης και πολλοί άλλοι ακόμη φιλόσοφοι, τόνιζαν την καθαρά λογική φύση αυτής της ιδέας η οποία μέχρι τότε στηριζόταν σε εμπειρική βάση. Για τον Έλληνα γεωμέτρη, ένα τρίγωνο ή ένας κύκλος υπήρχε μόνο στο μυαλό του ως ιδέα. Η ορατή εικόνα είναι μόνο μια ατελής απεικόνιση αυτής της ιδέας και η συσχέτιση μεταξύ αυτών των δύο εννοιών είναι η ίδια με εκείνη μεταξύ μιας ιδέας και της λέξης η οποία την εκφράζει. Ακόμα παραπέρα όμως, αυτές οι «ιδέες» του αριθμού και των μορφών, αντιπροσώπευαν για τους αρχαίους Έλληνες αντικείμενα τόσο μεγάλης καθαρότητας, που συχνά τα χρησιμοποιούσαν ως βασικά συστατικά της μυστικής τους θεολογίας.

Το βασικό όμως συστατικό των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, που τα διαφοροποίησε από τις μέχρι τότε αποσπασματικές μαθηματικές γνώσεις, ήταν η έννοια της απόδειξης. Το σύνθημα των αρχαίων Ελλήνων μαθηματικών και φιλοσόφων ήταν: «Καμιά πρόταση χωρίς μια λογική απόδειξη». Η απόδειξη είχε σαν αποτέλεσμα να μετατρέψει τις μαθηματικές συνταγές των Αιγυπτίων, Βαβυλωνίων και Ασσυρίων σε μια συνεκτική μαθηματική επιστημονική γνώση. Οι γεωμέτρες συνειδητοποίησαν ότι υπήρχαν κάποιες προτάσεις οι οποίες πράγματι έπρεπε να γίνουν αποδεκτές ως προφανείς, ιδιαίτερα αυτές που αφορούσαν τη δυνατότητα και μοναδικότητα κάποιων κατασκευών. Από τη στιγμή αυτή γεννήθηκε η ιδέα των αξιωμάτων. Με αυτούς τους στοιχειώδεις λογικούς κανόνες και κάποιους προσεκτικά διατυπωμένους ορισμούς, υπήρχαν οι βάσεις για την επιστημονική ανάπτυξη της γεωμετρίας. Η απόδειξη ήταν η διαδικασία μέσω της οποίας, ξεκινώντας από αυτές τις θεμελιώδεις προτάσεις και κάνοντας χρήση των κανόνων της λογικής συμπερασματολογίας, θα κατέληγαν σε άλλες αλήθειες. Όλα τα βήματα της απόδειξης, ανάλυση, σύνθεση, διάφορες μορφές απόδειξης, όλες αυτές οι ιδέες ήταν γνωστές σ' αυτούς.

Ένα άλλο γνώρισμα των αρχαίων Ελληνικών μαθηματικών, που ίσως εμπόδισε και την παραπέρα ανάπτυξή τους, ήταν η καλλιέργεια κάθε τι το οποίο ήταν απλό, ωραίο και αρμονικό. Η ομορφιά βρισκόταν κατά τους αρχαίους Έλληνες στις ιδέες και όχι σ' εκείνο το οποίο προσθέτει ο άνθρωπος στις ιδέες. Από την αντίληψη αυτή γεννιώνται, για παράδειγμα, οι τέλειοι και οι φίλιοι αριθμοί. Με βάση αυτήν ακριβώς την αντίληψη περί αρμονίας και απλότητας, μπορούμε να ερμηνεύσουμε την αποστροφή των αρχαίων Ελλήνων για τους άρρητους αριθμούς. Στη γεωμετρία βρίσκουμε ξανά τις ίδιες προκαταλήψεις. Η σφαίρα, το ισόπλευρο τρίγωνο, το κανονικό τετράεδρο, τα κανονικά Πλατωνικά στερεά, θεωρούνταν ότι είχαν θεϊκή προέλευση και υπόσταση. Η αρχαία Ελληνική γεωμετρία δεν επιδιώκει τη δυσκολία όπως, για παράδειγμα, η γεωμετρία των Ιησουιτών. Η γνώση είναι ένα διανοητικό κατασκεύασμα. Για να ανακαλύψει κάτι το ανθρώπινο μυαλό, αρκεί να παρατηρήσει με προσοχή. Ο στοχαστής δεν δημιουργεί, δεν επινοεί ένα καινούριο γεγονός, απλώς το επιβεβαιώνει. Αυτό ακριβώς το ιδεώδες της καθαρότητας των εννοιών κράτησε τον

Έλληνα μαθηματικό μακριά από πρακτικούς, χρησιμοθηρικούς σκοπούς. Καμιά πρακτική εφαρμογή δεν γινόταν αντικείμενο μελέτης. Ο Πλάτων θεωρούσε ότι κάθε είδους πρακτική εφαρμογή της γεωμετρίας ερχόταν σε αντίθεση με τον καθαρά θεωρητικό της χαρακτήρα και το φιλοσοφικό της υπόβαθρο. Οι πρακτικές εφαρμογές των μαθηματικών δεν είχαν καμιά σχέση με την ενασχόληση ενός στοχαστή. Μόνο κατώτεροι πνευματικά άνθρωποι μπορούσαν να ασχοληθούν με τις εφαρμογές των μαθηματικών στις ανάγκες της καθημερινής ζωής. Αυτή όμως η άρνηση της επαφής με την εμπειρία, δημιούργησε μια πληθώρα σοβαρών προβλημάτων και σιγά σιγά συνετέλεσε στην απομόνωση των Ελλήνων μαθηματικών σε τεχνητούς γυάλινους πύργους, στους οποίους κλείνονταν για να στοχαστούν τις απλές και καθαρές ιδέες που ανακάλυπταν με τη βοήθεια της λογικής.

Θα πρέπει επίσης να τονιστεί ότι κανένας μεγάλος Έλληνας μαθηματικός εκτός του Αρχιμήδη, όπως θα δούμε παρακάτω, δεν ενδιαφέρθηκε να περιγράψει και να εξηγήσει στους μαθητές του τη διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης. Το πώς δηλαδή μπορεί να γίνει η ανακάλυψη μιας μαθηματικής πρότασης. Ενώ τα στάνταρντς της απόδειξης ήταν πολύ αυστηρά και ενώ χωρίς αυστηρή απόδειξη καμιά πρόταση δεν γινόταν αποδεκτή, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν ασχολούνταν με την ανάλυση της φυσικής πορείας του ανθρώπινου μυαλού κατά τη διάρκεια της απόδειξης, ούτε ενδιαφέρονταν για το πώς οδηγήθηκε το μυαλό για να ανακαλύψει και να αποδείξει κάποιο θεώρημα ή γενικά μια μαθηματική πρόταση. Αυτός είναι ο βασικός λόγος που αυτές οι μαθηματικές αποδείξεις και συλλογισμοί φαίνονται τόσο τεχνητοί και ουρανοκατέβατοι σε μας, αλλά πολύ περισσότερο στους μαθητές μας. Αυτός ακριβώς ο αυστηρός και ανεξήγητος τρόπος παρουσίασης των μαθηματικών συλλογισμών στις αποδείξεις, έμελλε να επιδράσει καθοριστικά πάνω στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους για ένα μεγάλο χρονικό διάστημα που φθάνει, χωρίς υπερβολή, μέχρι τις μέρες μας.

Αργότερα, βέβαια, κάποιοι μαθηματικοί αισθάνθηκαν να ασφυκτιούν μέσα σε όλο αυτό τον κλοιό των περιοριστικών προϋποθέσεων για τη μελέτη των μαθηματικών. Έτσι, γρήγορα ανακάλυψαν τη συσχέτιση της γεωμετρίας με την κινηματική και προώθησαν τις έννοιες της μάζας εκ παραλλήλου με τις γεωμετρικές ιδέες. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να αναπτυχθούν νέες έννοιες και ιδέες για τη λύση κλασικών γεωμετρικών προβλημάτων, οι οποίες ξεπερνούσαν κατά πολύ τα όρια της παραδοσιακής γεωμετρίας όπως, για παράδειγμα, η κογχοειδής καμπύλη του Νικομήδη ή κισσοειδής του Διοκλέους. Αλλά με τον ερχομό του Αρχιμήδη μια ακόμη λαμπρή περίοδος αρχίζει για τα αρχαία Ελληνικά μαθηματικά. Αυτός ο μεγάλος μαθηματικός, σε αντίθεση με τους προγενέστερούς του, μας αποκαλύπτει στα συγγράμματά του, κυρίως στο έργο του *Η Μέθοδος*, το δρόμο που τον οδήγησε στις ανακαλύψεις του. Στη *Μέθοδο*, ο Αρχιμήδης μας περιγράφει και αναλύει με γλαφυρό τρόπο όλα τα στάδια και τις φάσεις, που πέρασε η σκέψη του μέχρις ότου ανακαλύψει τις διάφορες μαθηματικές προτάσεις. Αν και ο ίδιος αργότερα αποκάλεσε αυτό τον τρόπο παρουσίασης των μαθηματικών ιδεών ως ατελή και επέστρεψε στην παραδοσιακή μέθοδο της απόδειξης, εντούτοις οφείλουμε να ομολογήσουμε ότι η απόπειρα να περιγραφούν ορισμένες ευρετικές μέθοδοι, αποτελεί ένα σημαντικό σταθμό στη μαθηματική σκέψη και έχει τεράστια σημασία για τη διδακτική των μαθηματικών, όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο.

Στον Αρχιμήδη επίσης οφείλουμε την πρώτη μέθοδο για τον υπολογισμό των εμβαδών και των όγκων. Η μέθοδος αυτή ξεπερνά κατά πολύ την εποχή του, αφού υπερβαίνει τα τυπικά στάνταρντς, τις μεθόδους και τους περιορισμούς της παραδοσιακής αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής σκέψης. Η μέθοδος αυτή της εξάντλησης, όπως αποκαλείται, είναι ο πρόδρομος της ολοκλήρωσης και στα έργα του *Περί σφαίρας και κυλίνδρου*, *Περί ελίκων* και *Περί κωνοειδών και σφαιροειδών* μπορεί να διακρίνει κανείς τις αρχές του ολοκληρωτικού λογισμού. Όλα τα έργα του Αρχιμήδη διαπνέονται από μια εκπληκτική πρωτοτυπία και διαύγεια σκέψης συνδυασμένη με αυστηρότητα στις αποδείξεις και μεγάλη ικανότητα στις υπολογιστικές τεχνικές. Παρ' όλο, βέβαια, που μπορούμε να διακρίνουμε στον Αρχιμήδη μια μεγαλοφυή προσπάθεια για να διευρύνει τη στενή οπτική ενατένισης των παραδοσιακών Ελληνικών μαθηματικών, δεν μπορούμε ωστόσο να πούμε ότι ξέφυγε καθοριστικά από το Ελληνικό ιδεώδες της εποχής του. Διατήρησε την κλασική παράδοση, μολονότι κατάφερε να ξεπεράσει τις δυσκολίες της έννοιας του απείρου με τις μεγαλοφυείς τεχνικές του. Έτσι η ενότητα της Ελληνικής μαθηματικής επιστήμης, μπορούμε να πούμε ότι παραμένει ακόμα αναλλοίωτη.

Το μεγάλο ρήγμα στα Ελληνικά μαθηματικά, προήλθε από τις συσχετίσεις μεταξύ αριθμών και μεγεθών. Στην αρχή, οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί αισθάνθηκαν μεγάλη ικανοποίηση, ανακαλύπτοντας κάποιες συσχετίσεις, όπως π.χ. τις αναλογίες ή τα σχήματα των οποίων οι πλευρές είχαν κάποια απλή συσχέτιση. Όλα αυτά ικανοποιούσαν για ένα πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα το ιδεώδες της ομορφιάς και της απλότητας. Οι Πυθαγόριοι κυρίως ενδιαφέρθηκαν περισσότερο γι' αυτά τα ζητήματα και διακήρυσσαν ότι όλα τα πράγματα είναι αριθμοί και μπορούν να κατασκευαστούν από τη μονάδα. Το περίφημο όμως Πυθαγόρειο θεώρημα αποδείχθηκε τελικά μια συμφορά για τα Ελληνικά μαθηματικά, αφού με τη βοήθειά του ανακαλύφθηκαν οι άρρητοι ή ασύμμετροι αριθμοί, οι οποίοι δεν ήταν δυνατό να παραχθούν από τη μονάδα, σύμφωνα πάντα με τις αντιλήψεις των Πυθαγορείων. Η ενότητα των Ελληνικών μαθηματικών άρχισε να ραγίζει απ' αυτή την ανακάλυψη, η οποία ανέτρεπε ουσιαστικά την αρμονία ανάμεσα στην αριθμητική και στη γεωμετρία.

Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι η Ελληνική μαθηματική επιστήμη οφείλει τα μέγιστα στο ιδεώδες της ομορφιάς και της αρμονίας του αρχαίου Ελληνικού πνεύματος. Οι πρωτότυπες μεγαλοφυείς ιδέες, η προσήλωση στη διαύγεια και καθαρότητα των συλλογισμών, το ενδιαφέρον για αυστηρότητα και ακρίβεια, έθεσαν τις βάσεις της πραγματικής μαθηματικής επιστήμης κατά το πνεύμα που την εννοούμε σήμερα. Βέβαια, η απροθυμία των Ελλήνων μαθηματικών να προδώσουν το ιδεώδες της θείας τελειότητας και αρμονίας της επιστήμης τους, τους εμπόδισε να εξερευνήσουν τα επικίνδυνα μονοπάτια που ανοίχθηκαν μπροστά τους ως αποτέλεσμα των ανακαλύψεών τους. Έτσι η μαθηματική επιστήμη, η οποία θα μπορούσε να χαρακτηριστεί τέλεια –αν και πολύ περιορισμένη σε έκταση– με το κλείσιμο της Ελληνικής εποχής, θα έπρεπε να περιμένει αρκετούς αιώνες μέχρις ότου προχωρήσει σ' ένα νέο επίπεδο ανάπτυξης.

## 1.4 Μεσαίωνας και Αναγέννηση

Όπως είδαμε παραπάνω, οι αρχαίοι Έλληνες έδωσαν στα μαθηματικά μια τεράστια ώθηση, επιτυγχάνοντας να μελετήσουν αφηρημένες ιδέες και έτσι να βάλουν τα θεμέλια της αυστηρής μαθηματικής επιστήμης. Η κατάκτηση όμως της Ελλάδας από τους Ρωμαίους και η άνοδος του Χριστιανισμού, κατέστρεψαν το μεγαλειώδη Ελληνικό πολιτισμό. Χιλιάδες Ελληνικά βιβλία κάηκαν από τους Ρωμαίους και τους χριστιανούς, οι οποίοι θεώρησαν ότι τα Ελληνικά έργα είχαν τις ρίζες τους στον παγανισμό. Έπειτα ήρθε η κατάκτηση της Αιγύπτου από τους μουσουλμάνους το 600 μ.Χ. Ο Ομάρ, ο Άραβας κατακτητής, πίστευε ότι τα Ελληνικά συγγράμματα έρχονταν σε αντίθεση με τη διδασκαλία του Κορανίου. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τη μεγάλη καταστροφή των βιβλίων της βιβλιοθήκης της Αλεξάνδρειας.

Ευτυχώς, ένα μικρό μέρος των Ελληνικών έργων περισώθηκε και οι λόγιοι τα πήραν μαζί τους στην Κωνσταντινούπολη. Αυτά ακριβώς τα έργα μαζί με τις εργασίες κάποιων διανοούμενων στην Ινδία και την Αραβία, ήταν προορισμένα να παίξουν ένα σπουδαίο ρόλο στη ραγδαία ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης, η οποία συντελέστηκε 1.000 χρόνια αργότερα.

Πράγματι, οι Ινδοί και οι Άραβες ήταν εκείνοι οι οποίοι ανέπτυξαν το σημερινό αριθμητικό σύστημα και εισήγαγαν νέο συμβολισμό και κανόνες για τις πράξεις με τους άρρητους αριθμούς. Οι μουσουλμάνοι, που εκείνη την περίοδο κατείχαν μεγάλη δύναμη, πρόσφεραν κάτι πολύτιμο στη μαθηματική επιστήμη: Συνέθεσαν τη γνώση των Ελλήνων σοφών με τις υπολογιστικές τεχνικές των Ινδών μαθηματικών. Γι' αυτό, μπορούμε να πούμε, οι Άραβες ήταν αναμφισβήτητα οι θεμελιωτές της σύγχρονης άλγεβρας. Ποιοι ήταν όμως οι πραγματικοί σκοποί αυτών των αλγεβριστών; Χωρίς καμιά αμφιβολία, οι σκοποί αυτοί ήταν πάνω απ' όλα ωφελιμιστικοί και είχαν σαν στόχο την επίλυση πρακτικών προβλημάτων με γρήγορες μεθόδους. Αυτό είχε ως συνέπεια να παραμελείται η αυστηρότητα τις περισσότερες φορές και να δίνεται μεγάλο βάρος στα αποτελέσματα και στα καθ' εαυτό υπολογιστικά μαθηματικά.

Τώρα μπορούμε να κατανοήσουμε καλύτερα γιατί οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί δεν μπόρεσαν ποτέ να γίνουν καλοί αλγεβριστές, όντας προσκολλημένοι στο Πλατωνικό ιδεώδες, το οποίο επέβαλλε τη γεωμετρική μορφή στην αλγεβρική συλλογιστική. Η έκφραση $\sqrt{A}$ νοείται στον Ευκλείδη ως πλευρά τετραγώνου με εμβαδόν Α. Το γινόμενο αβ, ως εμβαδόν ορθογωνίου με μήκη πλευρών α και β κ.λπ. Οι Άραβες αλγεβριστές απελευθέρωσαν τον αριθμό από τη γεωμετρική του σημασία και αυτό έδωσε τεράστια ώθηση στη μαθηματική επιστήμη.

Κατά τη διάρκεια της μεσαιωνικής περιόδου, 500-1500 μ.Χ., η πρόοδος στα μαθηματικά ήταν σχετικά μικρή. Οι μεγαλοπρεπείς καθεδρικοί ναοί και τα μοναστήρια που κατασκευάστηκαν σε πολλά μέρη της Ευρώπης, ήταν πράγματι λαμπρά επιτεύγματα τα οποία απαιτούσαν ανεπτυγμένες γνώσεις μηχανικής και μαθηματικών, αλλά γενικά η Καθολική εκκλησία διακήρυσσε ότι ο Θεός των χριστιανών κυβερνούσε το σύμπαν και ότι ο ρόλος του ανθρώπου ήταν να υπηρετεί Αυτόν. Αυτή η αντίληψη προσέφερε ελάχιστη παρακίνηση ή ακόμη και ενθάρρυνση για τη μελέτη του φυσικού κόσμου. Μολονότι λίγοι διανοούμενοι, όπως ο Bhaskara, ο Fibonacci και ο Chin-Shao, παρήγαγαν κάποιο σημαντικό μαθηματικό έργο, γενικά η μαθηματική σκέψη μπορούμε να πούμε ότι δεν άνθησε ιδιαίτερα αυτή την περίοδο.

Προς το τέλος της μεσαιωνικής Ευρώπης, δηλαδή γύρω στο 1500 μ.Χ., παρατηρείται ένα μεγάλο ενδιαφέρον για τα έργα των αρχαίων Ελλήνων και άλλων μεγάλων στοχαστών. Ανάμεσα από μια σειρά επαναστατικών επιδράσεων, η μετάφραση και η μελέτη της αρχαίας Ελληνικής μαθηματικής σκέψης, έκανε τους διανοούμενους της εποχής εκείνης να πιστέψουν ότι ο Θεός είχε δημιουργήσει τον κόσμο έτσι ώστε να υπακούει σε μαθηματικούς νόμους και, επομένως, μέρος της ανθρώπινης ύπαρξης θα έπρεπε να αφιερωθεί στην ανακάλυψη της αρχιτεκτονικής του σύμπαντος. Οι άνθρωποι άρχισαν να κάνουν σοβαρές προσπάθειες για να κατανοήσουν και να εξηγήσουν το σύμπαν. Κατά τη διάρκεια των επόμενων 300 χρόνων η μαθηματική επιστήμη έζησε την ηρωική της εποχή.

## 1.5 Η ηρωική περίοδος των μαθηματικών

Γύρω στο 17ο αιώνα συνέβησαν ορισμένες ανακαλύψεις οι οποίες υπονόμευσαν τα θεμέλια της χριστιανικής πίστης. Για παράδειγμα, ο Κοπέρνικος, ο Γαλιλαίος και ο Κέπλερ, πρόσφεραν με το έργο τους επιστημονική μαρτυρία για το ότι η Γη δεν αποτελεί το κέντρο του σύμπαντος. Η επικρατούσα μέχρι τότε άποψη ήταν ότι όλα τα ουράνια σώματα περιστρέφονταν γύρω από τη Γη και ότι τα γήινα όντα ήταν το κύριο μέλημα του Θεού. Όταν αυτό το θεμελιώδες δόγμα αποδείχθηκε αναληθές, τα θεμέλια της Εκκλησίας άρχισαν να τρίζουν, καθώς τα ανθρώπινα όντα εμφανίζονταν να είναι κάτοικοι ενός ουράνιου σώματος το οποίο ήταν ένα μόνο εν μέσω άπειρων άλλων στο στερέωμα.

Πράγματι, πολλά διλήμματα εμφανίστηκαν με την ανάπτυξη των μαθηματικών, μια και αυτά θεωρήθηκαν ως το κατ' εξοχήν εργαλείο για τη μελέτη και ερμηνεία της φύσης. Θα μπορούσε να γραφτεί ολόκληρο βιβλίο πάνω σ' αυτό το θέμα μόνο. Αρκεί να ειπωθεί εδώ, ότι μεγάλοι στοχαστές αμφισβήτησαν το ρόλο του Θεού στην κατασκευή του σύμπαντος, καθώς επίσης και το ότι Αυτός είχε κατασκευάσει ένα μαθηματικό σχέδιο για τον κόσμο. Φιλόσοφοι του 18ου αιώνα, όπως π.χ. ο David Hume και ο Immanuel Kant, συνέβαλαν στην παραπέρα έξαρση αυτής της σύγχυσης, ισχυριζόμενοι ότι οι μαθηματικές αρχές δεν προέρχονται από το φυσικό κόσμο αλλά από το ανθρώπινο μυαλό.

Σε πείσμα αυτής της αβεβαιότητας γύρω από τη φύση των μαθηματικών, ακόμα μεγαλύτερες συνεισφορές προς την επιστήμη αυτή έγιναν από ιδιοφυείς μαθηματικούς όπως οι Newton, Descartes, Fermat, Taylor, Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, Monge και τόσους άλλους ακόμη. Οι γίγαντες αυτοί της μαθηματικής σκέψης εργάστηκαν με επιτυχία σ' όλες σχεδόν τις τότε γνωστές περιοχές των μαθηματικών και διεύρυναν εκπληκτικά το οικοδόμημα της μαθηματικής επιστήμης προς όλες του τις διαστάσεις. Η πρώτη σημαντική ώθηση στα μαθηματικά του 17ου αιώνα προήλθε από τις εργασίες του Descartes, ο οποίος κάνοντας χρήση των συντεταγμένων επιδίωξε την αλγεβροποίηση της γεωμετρίας. Ο Descartes θεώρησε την άλγεβρα ως τη μέθοδο της «παγκόσμιας επιστήμης» και στο έργο του *Γεωμετρία* (1637) προσπάθησε να δώσει μια εφαρμογή της γενικής του μεθόδου για την ενοποίηση της άλγεβρας με τη γεωμετρία. Έτσι μπήκαν τα θεμέλια της αναλυτικής γεωμετρίας.

Η δεύτερη εντυπωσιακή ανακάλυψη, η οποία έγινε την ίδια περίπου εποχή, ήταν η γέννηση του απειροστικού λογισμού με θεμελιωτές τους Newton και Leibniz. Το εργαλείο της επεξεργασίας των απειροστών, που πρόσφεραν στη μαθηματική επιστήμη οι Newton και Leibniz, αποδείχθηκε εξαιρετικά χρήσιμο και αποτελεσματικό, σε βαθμό που να δημιουργήσει αλυσιδωτές επαναστατικές εξελίξεις σ' όλες τις επιστήμες που συνδέονται με τα μαθηματικά. Στα χέρια των μαθηματικών του 18ου αιώνα εξελίχθηκε σ' ένα ισχυρότατο μέσο για την επίλυση μιας εντυπωσιακής ποικιλίας σημαντικών προβλημάτων των μαθηματικών και της φυσικής. Στην ανάλυση π.χ. έχουμε τις εργασίες των Mac Laurin και Taylor στις δυναμοσειρές και του Euler στις απειροσειρές. Ο τελευταίος επίσης έδωσε στην τριγωνομετρία την οριστική της σχεδόν μορφή. Με τον Lagrange φθάνουμε στο θρίαμβο της καθαρής ανάλυσης, αφενός με τις προσπάθειες για τη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού, και αφετέρου με την εφαρμογή των νέων μαθηματικών εργαλείων στη μηχανική με σκοπό την ενοποίηση διαφόρων αρχών, όπως έγινε με την εξίσωση της κίνησης «κατά Lagrange»

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial d_i}-\frac{\partial T}{\partial d_i}=F_i$$

Σημαντικές προόδους όμως έχουμε σ' όλους τους κλάδους της κλασικής ανάλυσης, όπως διαφορικές εξισώσεις, ελλειπτικά και επικαμπύλια ολοκληρώματα, μιγαδική ανάλυση κ.λπ. Στο έργο του Laplace, *Theorie analytique des propabilites* (1812), μπορεί κάποιος να βρει τις ιδέες για πολλές μεταγενέστερες ανακαλύψεις στην πιθανοθεωρία (τυχερά παιχνίδια, γεωμετρική πιθανότητα, κανονική κατανομή, θεωρία ελαχίστων τετραγώνων, γενέτειρες συναρτήσεις κ.λπ.).

Η γεωμετρία έκανε σημαντικά βήματα επίσης με τις εργασίες του Clairaut, που ήταν ο πρώτος που πραγματεύθηκε την αναλυτική και διαφορική γεωμετρία των καμπυλών του χώρου. Ο μεγαλύτερος γεωμέτρης όμως του 18ου αιώνα ήταν ο Monge, που θεωρείται ο ιδρυτής της παραστατικής γεωμετρίας. Η ανάπτυξη της στερεομετρίας οφείλεται εν μέρει επίσης στις μαθηματικές και επαναστατικές δραστηριότητες του Monge (Boyer 1968, p. 519).

Εξαιρετικά εντυπωσιακή ήταν επίσης και η εφαρμογή όλων αυτών των τεχνικών στις πειραματικές επιστήμες της εποχής, όπως μηχανική, κινηματική, βαλιστική, διοπτρική, υδραυλική, αστρονομία, ουράνια μηχανική, ναυπηγική κ.λπ. Αυτή ακριβώς η επιβεβαίωση και η εφαρμογή των μαθηματικών αυτών στην πράξη, ήταν και ο σημαντικότερος λόγος που παρακινούσε, μάγευε και παρότρυνε αδιάκοπα τους μαθηματικούς της εποχής να διευρύνουν ασταμάτητα την επιστήμη τους, χωρίς να νοιάζονται και πολύ για τα θεμέλια στα οποία βασιζόταν. «Ο 18ος αιώνας έχει ονομαστεί η ηρωική εποχή των μαθηματικών, επειδή οι μαθηματικοί τολμούσαν και επιτύγχαναν τέτοιες μεγαλειώδεις επιστημονικές κατακτήσεις, με τόσο εξαιρετικά μικρό λογικό εξοπλισμό» (Kline 1980, p. 168).

Αυτό βέβαια δεν μπορούσε να κρατήσει για πολύ και ήδη από το 18ο αιώνα άρχισαν να εμφανίζονται αντιφάσεις και παράδοξα, κυρίως από την ατελή κατανόηση εννοιών, όπως το όριο, τα απειροστά, η συνέχεια, η σύγκλιση, η σειρά κ.ά. Έτσι ο διαφορετικός, για παράδειγμα, τρόπος χειρισμού των απειροστών οδήγησε σε παράδοξα, όπως:

$$\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = 0 \quad \text{ή} \quad -1 = 1 + 2 + 4 + 8 \ldots$$

Οι αποδείξεις έμοιαζαν περισσότερο με δόγματα. Η διαίσθηση είχε αντικαταστήσει σχεδόν πλήρως τη λογική. Τα γεωμετρικά διαγράμματα, τα επιχειρήματα από τη φυσική, οι αυθαίρετες αρχές, όπως αυτή της διατήρησης των ισοδύναμων μορφών*, η προσφυγή στη μεταφυσική, είχαν γίνει τα κύρια συστατικά των μαθηματικών αποδείξεων, για να μην πούμε πως τις είχαν αντικαταστήσει.

Όπως ήταν επόμενο, λοιπόν, άρχισε να αναπτύσσεται από τους μεγα-

* Η αρχή αυτή διατυπώθηκε από τον Άγγλο μαθηματικό George Peacock (1791 - 1858), με σκοπό να επεκτείνει ιδιότητες της αριθμητικής άλγεβρας, οι εκφράσεις της οποίας είναι γενικές στη μορφή αλλά ειδικές στην τιμή (θετικοί ακέραιοι), στη συμβολική άλγεβρα όπου οι εκφράσεις είναι γενικές και στην τιμή και στη μορφή. Η διατύπωση της αρχής είναι η εξής: Εάν κάποιες αλγεβρικές μορφές είναι ισοδύναμες όταν τα σύμβολα είναι γενικά στη μορφή, αλλά ειδικά στην τιμή (θετικοί ακέραιοι), τότε θα είναι ομοίως ισοδύναμες και στην περίπτωση που τα σύμβολα είναι γενικά στην τιμή και στη μορφή.

Η επιμεριστική ιδιότητα π.χ. $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$, ισχύει στην αριθμητική άλγεβρα για $\alpha, \beta, \gamma$ θετικούς ακέραιους και επομένως θα ισχύει και στη συμβολική άλγεβρα για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Περισσότερα για τον G. Peacock βλέπε στο H. Eves (1983, p. 91). Για την παιδαγωγική επίσης αξία της αρχής αυτής, βλέπε Arcavi et al. (1982).

λύτερους μαθηματικούς της εποχής η προσπάθεια να μπει μια τάξη και να γίνει ένα ξεκαθάρισμα σε βασικές έννοιες κλειδιά, όπως σ' αυτές των απειροστών και των ορίων. Εδώ εμφανίζονται και οι διάφορες ερμηνείες των Euler, Lagrange, Laplace για τη φύση των απειροστών, για την έννοια του ορίου, για τη φύση του συνεχούς κ.λπ. Δυστυχώς όμως, η γεωμετρική διαίσθηση στη φάση αυτή έπαιξε αρνητικό ρόλο και παρέσυρε τους μαθηματικούς σε λανθάνουσες αντιλήψεις για την έννοια του ορίου, της συνέχειας, της παραγώγου κ.λπ. Αποτέλεσμα ήταν να μεγαλώνει το δέος και ο μυστικισμός γύρω απ' αυτές τις έννοιες.

Εκτός όμως από τη γενικότερη σύγχυση που επικρατούσε, όσον αφορά τα θεμέλια, προς τα τέλη του αιώνα είχε δημιουργηθεί και η απαισιόδοξη αίσθηση πως το πεδίο των μαθηματικών είχε κατά κάποιο τρόπο εξαντληθεί και πως οι γίγαντες της μαθηματικής σκέψης της εποχής εκείνης τα είχαν πει σχεδόν όλα, αφήνοντας για λύση ασήμαντης αξίας προβλήματα στους μαθηματικούς της επόμενης γενιάς. Βέβαια, η ανησυχία των μαθηματικών είχε κάποια βάση, αφού το 18ο αιώνα είχαμε μια προσπάθεια ποσοτικής κυρίως διεύρυνσης του μαθηματικού οικοδομήματος, εμπνευσμένη από τις τεράστιες δυνατότητες των νέων εργαλείων του μαθηματικού λογισμού του 17ου αιώνα. Ο 18ος αιώνας δεν μας έδωσε μεγάλες ιδέες που θα συνέβαλαν στο ποιοτικό άλμα, στην επαναστατική έκρηξη των μαθηματικών. Συνέβαλε όμως αναμφισβήτητα στην ποσοτική συσσώρευση της μαθηματικής γνώσης, που οδήγησε στην ποιοτική αλλαγή και την εμφάνιση των επαναστατικών ιδεών του 19ου αιώνα.

## 1.6 Ο χρυσός αιώνας των μαθηματικών

Η μαθηματική επιστήμη το 19ο αιώνα εξελίχθηκε ταχύτατα προς δυο βασικές κατευθύνσεις. Από το ένα μέρος επεξεργάστηκε και ξεκαθάρισε τα βασικά εργαλεία του απειροστικού λογισμού, δημιουργώντας ένα αυστηρό σύστημα ανάλυσης. Από το άλλο μέρος αμφισβήτησε έντονα τη λογική βάση του απειροστικού λογισμού και της γεωμετρίας και έφερε στο προσκήνιο νέες ιδέες, που οδήγησαν τελικά στην ανακάλυψη νέων μαθηματικών κόσμων με τις θεωρίες των απειροσυνόλων, των μη Ευκλείδειων γεωμετριών, των αλγεβρικών δομών κ.λπ. «Αυτές ακριβώς οι θεωρίες οδήγησαν τους μαθηματικούς του 20ού αιώνα στην πιο βαθιά κατανόηση των θεμελίων της επιστήμης τους» (Steen 1980, p. 4).

Οι σημαντικότερες ποιοτικά ιδέες και έννοιες που αναπτύχθηκαν το 19ο αιώνα και που έμελλε να παίξουν καθοριστικό ρόλο στη διαμόρφωση των μαθηματικών της εποχής μας, είναι:

α) *Η έννοια του αλγόριθμου*: Η έννοια αυτή αναπτύχθηκε συστηματικά από τις εργασίες των Gauss, Abel, Galois και άλλων, στην προσπάθειά τους να κατασκευάσουν, με κανόνα και διαβήτη, τα κανονικά πολύγωνα και άλλες γεωμετρικές κατασκευές ή ακόμη να δώσουν τη λύση των πολυωνυμικών εξισώσεων με τύπους που θα περιείχαν ριζικά. Ο αλγόριθμος ήταν μια διαδικασία που περιγραφόταν με ακρίβεια και είχε σαν σκοπό να υλοποιήσει ως το τέλος τους τις προτεινόμενες κατασκευές. Αργότερα η έννοια αυτή αναλύθηκε, μελετήθηκε και η παραπέρα επεξεργασία της, μαζί με τις κατοπινές ιδέες της μαθηματικής λογικής, οδήγησε στην ανάπτυξη του ψηφιακού ηλεκτρονικού υπολογιστή, ο οποίος σφράγισε τον αιώνα μας και γενικότερα το μέλλον της ανθρωπότητας.

β) *Η έννοια της αλγεβρικής δομής*: Το 1834 ο William Hamilton, παρακινημένος από τις μελέτες του στη φυσική, αναγκάστηκε να επινοήσει μια άλγεβρα στην οποία δεν ίσχυε ο αντιμεταθετικός νόμος του πολλαπλασιασμού. Είναι η άλγεβρα των quaternious (Παπασταυρίδης 1983α). Τον επόμενο χρόνο, ο H. Grassmann έδωσε παραδείγματα πιο γενικευμένων αλγεβρών, μελετώντας υπερμιγαδικούς αριθμούς. Αργότερα, το 1857, αναπτύχθηκε η άλγεβρα πινάκων από τον A. Cayley (1821 - 1895), ενώ την ίδια εποχή ο G. Boole (1815 - 1864) δημοσίευσε την πραγματεία του *Μια διερεύνηση των νόμων της σκέψης*, στην οποία ανέπτυσσε την άλγεβρα των συνόλων, γνωστή ως άλγεβρα του Boole, που άνοιξε το δρόμο για τη μαθηματικοποίηση της λογικής, του κύριου εργαλείου για την κατοπινή μελέτη των μαθηματικών θεμελίων.

γ) *Η έννοια της συνάρτησης*: Η έννοια τη συνάρτησης, όπως εξάλλου και όλες οι θεμελιώδεις έννοιες των μαθηματικών, ακολούθησε ένα μακρύ δρόμο ανάπτυξης και εξέλιξης. Σήμερα, για παράδειγμα, οι περισσότεροι μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση όπως ο Euler, δηλαδή σαν μια εξίσωση ή τύπο που περιλαμβάνει μεταβλητές και σταθερές. Ο συμβολισμός επίσης f(x) οφείλεται στους Clairaut - Euler. Ο Dirichlet (1805 - 1859) το 1837 έδωσε τον ορισμό που συναντάμε σήμερα στα βιβλία της ανάλυσης και περιλαμβάνει γενικότερους τύπους συσχέτισης μεταβλητών απ' ό,τι προηγουμένως. Η έννοια της συνάρτησης έμελλε να διαπεράσει όλους τους κλάδους των μαθηματικών και να θεωρηθεί σαν μια ενοποιητική, κεντρική ιδέα για την οργάνωση και την παραπέρα ανάπτυξή τους.

δ) *Η μη Ευκλείδεια γεωμετρία*: Ίσως το πιο αξιοσημείωτο και επαναστατικό γεγονός στα μαθηματικά του 19ου αιώνα ήταν η ανακάλυψη, γύρω στο 1829, της πρώτης μη Ευκλείδειας γεωμετρίας. Οι προσπάθειες των μαθηματικών να αποδείξουν το πέμπτο αίτημα της παραλληλίας του Ευκλείδη άρχισαν, όπως μας πληροφορεί ο Πρόκλος, από πολύ νωρίς, ήδη από τον Κλαύδιο Πτολεμαίο (150 π.Χ.) και συνεχίστηκαν μέχρι το 19ο αιώνα. Οι πρώτοι που υποψιάστηκαν την ανεξαρτησία του πέμπτου αιτήματος από τα υπόλοιπα, ήταν ο Gauss στη Γερμανία, ο Bolyai στην Ουγγαρία και ο Lobachevsky στη Ρωσία. Αποδείξεις για την ανεξαρτησία του πέμπτου αιτήματος (και της άρνησής του) από τα άλλα αξιώματα του Ευκλείδη έδωσαν αργότερα οι Cayley, Klein, Poincaré και άλλοι.

Η σημασία και η ώθηση που έδωσε στη μαθηματική επιστήμη η ανακάλυψη της μη Ευκλείδειας γεωμετρίας θεωρείται καθοριστική και σήμανε μια ποιοτική αλλαγή στην εξέλιξη των μαθηματικών. Τα αξιώματα της γεωμετρίας έγιναν για τους μαθηματικούς απλές υποθέσεις, για τη διαισθητική αλήθεια (αυτοπροφάνεια) των οποίων δεν χρειαζόταν πλέον να νοιάζονται. Η παραδοσιακή πίστη στην απόλυτη αλήθεια των μαθηματικών άρχισε να κλονίζεται και το εκκρεμές να γέρνει στο άλλο άκρο. Με τα λόγια τού Cantor περιγράφεται ως εξής: «Η ουσία των μαθηματικών βρίσκεται στην ελευθερία τους». Οι μαθηματικές αλήθειες δεν είναι απόλυτες. Υπάρχουν μόνο αληθινές προτάσεις σ' αυτό ή στο άλλο αξιωματικό σύστημα.

Με την απελευθέρωση της γεωμετρίας από τα δεσμά της παράδοσης, ένα πλήθος γεωμετριών αναπτύχθηκε στη συνέχεια. Με τις εργασίες των Felix Klein και Hilbert διαπιστώθηκε ότι πολλά μαθηματικά συστήματα μπορούν να περιγραφούν μόνο από τα αξιώματά τους. Δηλαδή, εάν κάποιος γνωρίζει τα αξιώματα, δεν χρειάζεται παραπέρα περιγραφή του συστήματος. Οποιαδήποτε άλλα γεγονότα μπορούν να εξαχθούν απ' αυτά. Έτσι, αρχίζει η αξιωματική δραστηριότητα προς το τέλος του 19ου αιώνα που συνεχίζεται μέχρι σήμερα και που δημιούργησε τις διαφορετικές αντιλήψεις γύρω από τη φύση και την ουσία των μαθηματικών· αντιλήψεις που επηρέασαν και επηρεάζουν την εξέλιξη των μαθηματικών στη μορφή και το περιεχόμενο, καθώς και την ίδια τη μαθηματική εκπαίδευση, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

ε) *Η αριθμητικοποίηση της ανάλυσης*: Η προσφορά των μαθηματικών του 17ου, του 18ου και του 19ου αιώνα ήταν τόσο μεγάλη, ώστε το μαθηματικό οικοδόμημα να έχει διογκωθεί επικίνδυνα, χωρίς παράλληλα να υπάρχουν τα λογικά θεμέλια για μια τέτοια εξέλιξη. Οι ασαφείς έννοιες και όροι, οι διαισθητικές αποδείξεις, οι διφορούμενες εκφράσεις, οι αντιφάσεις, τα παράδοξα, είχαν φθάσει σε τέτοιο σημείο που γινόταν πια ξεκάθαρο πως τα μαθηματικά περνούσαν μια βαθιά κρίση, τη δεύτερη στην ιστορία τους. Καθώς μεγάλωνε η συνειδητοποίηση ότι το μαθηματικό οικοδόμημα στηριζόταν στην άμμο, οι μαθηματικοί άρχισαν σιγά σιγά να κάνουν προσπάθειες για τη δημιουργία σταθερών θεμελίων, πρώτα πρώτα στην ανάλυση. Τέτοιες προσπάθειες έκαναν αρχικά οι D'Alembert, Lagrange, Laplace και Gauss. Ο Weierstrass (1815 - 1897) όμως, ήταν αυτός που «είπε τον τελευταίο λόγο πάνω στην αυστηρότητα... και κατασκεύασε μια καθαρά τυπική αριθμητική βάση για την ανάλυση, εντελώς ανεξάρτητη από κάθε γεωμετρική διαίσθηση» (Boyer 1959, p. 284).

Ο Weierstrass πρότεινε ένα πρόγραμμα, βάσει του οποίου θα έπρεπε ν' αναπτυχθεί αυστηρά το σύστημα των πραγματικών αριθμών και έπειτα πάνω σ' αυτό να οικοδομηθεί η έννοια του ορίου, της συνέχειας, της παραγωγισιμότητας, της σύγκλισης κ.λπ. Το μεγαλεπήβολο αυτό πρόγραμμα ονομάστηκε το 1895 από τον F. Klein «αριθμητικοποίηση της ανάλυσης» και πραγματοποιήθηκε τελικά προς το τέλος του αιώνα από τους Weierstrass, Dedekind, Cantor, Peano και άλλους.

## 1.7 Τα μαθηματικά του 20ού αιώνα

Το 1900, στο παγκόσμιο συνέδριο των μαθηματικών στο Παρίσι, ο David Hilbert ανέφερε στην ομιλία του 23 περίφημα άλυτα προβλήματα, που η λύση τους θα έδινε μια νέα ώθηση στη μαθηματική επιστήμη. Πράγματι, τα προβλήματα αυτά άσκησαν καθοριστική επίδραση στην κατεύθυνση των μαθηματικών του 20ού αιώνα. Ολόκληροι νέοι κλάδοι αναπτύχθηκαν στην προσπάθεια για την επίλυσή τους. Σ' αυτό βοήθησε βέβαια και η άποψη του Hilbert, που αργότερα εξελίχθηκε σε δογματική πίστη, ότι δηλαδή στα μαθηματικά δεν έχει θέση ο αγνωστικισμός. Για να τεκμηριώσει αυτή την άποψη ο Hilbert και οι μαθητές του σ' όλο τον κόσμο, ανέπτυξαν ένα πρόγραμμα για την κωδικοποίηση και τυποποίηση της μαθηματικής σκέψης και απόδειξης. Το πρόγραμμα αυτό συνιστά τη φορμαλιστική προσέγγιση στην ανάπτυξη των μαθηματικών και πήρε το όνομά του από το ότι εκφράζει όλα τα λογικά και μαθηματικά αξιώματα, μέσα από φόρμουλες ή συλλογές συμβόλων. Το πρόγραμμα όμως αυτό απέτυχε οριστικά, όταν το 1931 ο Kurt Godel απέδειξε την πρόταση που θεωρείται σαν ένα από τα λαμπρότερα επιτεύγματα της ανθρώπινης σκέψης, δηλαδή το θεώρημα της μη πληρότητας του Godel. Αυτό απλά μας λέει ότι σε κάθε αξιωματικό σύστημα, που περιέχει όλη την αριθμητική, υπάρχει μια τουλάχιστον μη - αποκρίσιμη πρόταση, με την έννοια ότι ούτε η άρνηση, ούτε η κατάφασή της μπορούν ν' αποδειχτούν από τα αξιώματα του συστήματος. Ο Gödel απέδειξε δηλαδή, με τα λόγια του Hilbert, ότι στα μαθηματικά υπάρχει πάντα ένα είδος αγνωστικισμού.

Μια άλλη μεγάλη ώθηση στα μαθηματικά του 20ού αιώνα προήλθε από τις πρωτοποριακές εργασίες στα απειροσύνολα προς το τέλος του 19ου αιώνα. Η θεωρία των συνόλων προμήθευσε τους μαθηματικούς με μια πολύ χρήσιμη και πλούσια μαθηματική γλώσσα, στην οποία πολλά σημαντικά προβλήματα μπορούσαν ν' αναδιατυπωθούν κομψά και να επιλυθούν. Κάτω από την επίδραση της ώθησης που έδωσε στα μαθηματικά η θεωρία των συνόλων, εμφανίστηκε γύρω στο 1930 μια Γαλλική σχολή σκέψης και νοοτροπίας, η οποία έπαιξε σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των σημερινών μαθηματικών. Ήταν η ομάδα Bourbaki που επιχείρησε να επαναδιατυπώσει και ταξινομήσει τα μαθηματικά με βάση τις αρχές τους (όχι ιστορικά αλλά λογικά) και προσπάθησε να τα ανακατασκευάσει σ' όλη τους την πολυπλοκότητα με υλικά και μέσα που πέρασαν από το κόσκινο της αξιωματικής κριτικής.

Ο σκοπός των Bourbaki είναι η μελέτη των θεμελιωδών δομών των μαθηματικών και η ενοποίησή τους μέσω αυτών ακριβώς των δομών. Οι τρεις κύριες είναι οι αλγεβρικές, οι τοπολογικές και οι διατακτικές. Το έργο των Bourbaki είχε πολύ μεγάλη επίδραση και στα μαθηματικά και στη μαθηματική εκπαίδευση. Πολλές από τις μεταπολεμικές γενιές των πανεπιστημιακών δασκάλων υποστηρίζουν με ενθουσιασμό τους Bourbaki. Ενσωμάτωσαν μάλιστα στις παραδόσεις τους το «Μπουρμπακικό» στυλ και πρωτοστάτησαν στις μεγάλες μεταρρυθμίσεις, που έγιναν το 1960 παγκόσμια στη μαθηματική εκπαίδευση (Τουμάσης 1989, Κεφάλαιο 2).

Η τελευταία μεγάλη ώθηση στα μαθηματικά του 20ού αιώνα προήλθε από την ανάπτυξη και τελειοποίηση του ηλεκτρονικού υπολογιστή. Η τρομακτική έκρηξη της τεχνολογίας στον αιώνα μας, θα ήταν άπιαστο όνειρο χωρίς τις εφαρμογές των μαθηματικών που στηρίχθηκαν στον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Το σημαντικότερο όμως είναι ότι αυτές ακριβώς οι νέες δυνατότητες για επίλυση προβλημάτων στα εφαρμοσμένα μαθηματικά έφεραν μια ποιοτική αλλαγή στην αντίληψη για το τι σημαίνει λύση ενός προβλήματος. Οι στάσεις και οι απόψεις των μαθηματικών γύρω από τη φύση της απόδειξης άλλαξαν σημαντικά*. Αυτές οι αλλαγές, συνεπικουρούμενες και

* Καθοριστική επίδραση για τη δημιουργία αυτών των αντιλήψεων και στάσεων γύρω από τη φύση της απόδειξης, είχε η λύση που έδωσαν το 1976 οι K. Appel και W. Haken στο πρόβλημα των τεσσάρων χρωμάτων με τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

από την αδιάκοπα αυξανόμενη χρήση των υπολογιστών σ' όλους τους κλάδους της επιστήμης, άρχισαν να μετατοπίζουν το ενδιαφέρον των μαθηματικών από τα «συνεχή» μαθηματικά (κλασική ανάλυση κυρίως) στα «διακριτά» (συνδυαστική θεωρία, θεωρία γραφημάτων, αφηρημένη άλγεβρα κ.λπ.), που είναι τα κατ' εξοχήν μαθηματικά του ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Σήμερα η μαθηματική γνώση πολλαπλασιάζεται με φανταστικούς ρυθμούς. Υπάρχουν γύρω στους 100 βασικοί κλάδοι μαθηματικών, με περίπου 3.400 υποκατηγορίες (David και Hersh 1981, pp. 29-30). Τα αποτελέσματα της έρευνας σ' αυτά τα πεδία διαδίδονται μέσω από 1.500 περιοδικά που δημοσιεύονται σε 100 διαφορετικές γλώσσες, ενώ πάνω από 200.000 θεωρήματα παράγονται κάθε χρόνο από τα μέλη της μαθηματικής κοινότητας.

# 2. Τα μαθηματικά ως κοινωνική δραστηριότητα

## 2.1 Μαθηματικά και κοινωνική εξέλιξη

Τα μαθηματικά, έτσι όπως παρουσιάζονται στα διάφορα βιβλία, είτε αυτά είναι διδακτικής φύσεως (σχολικά), είτε ακόμη περισσότερο επιστημονικής φύσεως, δίνουν την εντύπωση ότι είναι απρόσωπα, ανεξάρτητα, στερημένα από κάθε κοινωνική ή ανθρώπινη πλευρά. Τα ονόματα των συγγραφέων παρατίθενται ξερά, χωρίς καμιά αναφορά γύρω από το ιστορικό το σχετικό με τη συγκεκριμένη εργασία τους. Έτσι πολύ συχνά υποστηρίζεται ότι η δραστηριότητα του μαθηματικού είναι ανεξάρτητη από την κοινωνία στην οποία ζει, παρ' όλο που τα μαθηματικά αυτά καθ' εαυτά, εξαιτίας της σπουδαιότητας στην τεχνολογία, έχουν μια επίδραση πάνω στην κοινωνική αλλαγή. Στη συνέχεια, τα επιχειρήματα αυτά προχωρούν και πάρα πέρα, υποστηρίζοντας ότι η ανάπτυξη του πολιτισμού μας λαμβάνει χώρα πάνω σε ένα μαθηματικό πλαίσιο, το οποίο πηγάζει από ένα είδος αποκάλυψης που υπερβαίνει την αισθητή πραγματικότητα. Βεβαίως, αναγνωρίζεται το γεγονός ότι οι μαθηματικοί συνεχίζουν τις εξερευνήσεις των προγενεστέρων τους και κατά συνέπεια η εργασία τους εξαρτάται, κατά κάποιο τρόπο, απ' αυτές. Λέγεται όμως, ότι οι ίδιοι με τη σειρά τους δημιουργούν αυθαίρετες οντότητες, κατασκευάζοντας αυθαίρετους ορισμούς σύμφωνα με ό,τι τους εξυπηρετεί καλύτερα, αρκεί το οικοδόμημα αυτό που κατασκευάζουν να πληροί τους αυστηρούς τυπικούς κανόνες της λογικής. Σύμφωνα με αυτή τη συλλογιστική, οι μαθηματικοί υπηρετούν ένα παγκόσμιο σπορ και τείνουν να συμπεριφέρονται ως ελεύθερα, καθαρά πνεύματα, που επικοινωνούν με άλλα επίσης καθαρά πνεύματα, ανακοινώνοντας μεταξύ τους τις αιώνιές τους αλήθειες. Αυτή η άποψη ενισχύεται ακόμη παραπέρα, όταν ισχυρίζονται κάποιοι ότι το ξέκομμα του μαθηματικού από κάθε συγκεκριμένη κοινωνική πραγματικότητα δεν τον εμποδίζει από το να παράγει αξιόλογη εργασία, η οποία μάλιστα μπορεί κάποτε να αποδειχτεί πολύτιμη σε πρακτικές εφαρμογές, μολονότι ο ίδιος μπορεί να μην είχε φανταστεί ποτέ του ότι κάτι τέτοιο θα μπορούσε να συμβεί. Κατά συνέπεια, οι μαθηματικοί εμφανίζονται να έχουν μεν κάποια επίδραση πάνω στην εξέλιξη της κοινωνίας τους, αλλά όμως η πηγή της δημιουργικής τους εργασίας θεωρείται ότι δεν είναι η κοινωνία στην οποία ζουν και σκέφτονται αλλά αυτή καθ' εαυτή η ιδιοφυΐα τους. Αυτό μας ξαναφέρνει πίσω στην άποψη ότι η καθοδηγητική δύναμη της κοινωνικής αλλαγής πηγάζει από τους διανοούμενους και τις μεγαλοφυΐες.

Οι παραπάνω απόψεις πηγάζουν από μια επιφανειακή και επιπόλαιη ανάλυση της πραγματικότητας. Εάν αποδεχτούμε αυτή την απομόνωση του μαθηματικού ως κάτι το δεδομένο, θα πρέπει να θεωρήσουμε ότι και η μαθηματική δημιουργία είναι το αποτέλεσμα μιας ανεξήγητης θείας έμπνευσης, η οποία βρίσκεται υπεράνω μιας λογικής ερμηνείας. Αυτή η ιδεαλιστική άποψη εκφράζεται πολύ παραστατικά από την περίφημη φράση του Henri Poincaré: «Η σκέψη δεν είναι τίποτε άλλο παρά μια φωτεινή αναλαμπή στο μέσο μιας μεγάλης νύχτας. Αλλά αυτή ακριβώς η αναλαμπή είναι το παν». Η πραγματικότητα όμως, δεν μπορεί να είναι ακριβώς έτσι. Δεν είναι δυνατό να ερμηνεύσει κάποιος τις διάφορες φάσεις ανάπτυξης των μαθηματικών εάν τα απομονώσει από το κοινωνικό τους πλαίσιο και το συγκεκριμένο κάθε φορά υπόβαθρό τους. Και αυτό, γιατί η διαδικασία αυτής της ανάπτυξης είναι τόσο πολύπλοκη και τόσο πολύ συνυφασμένη με τη γενική εξέλιξη της ανθρωπότητας, ώστε στην κυριολεξία να παραμορφώνεται όταν επιχειρήσει κάποιος να την απομονώσει.

Ο ανθρώπινος και ο κοινωνικός χαρακτήρας των μαθηματικών δεν μπορεί να υποτιμηθούν, για τον απλούστατο λόγο ότι οι μαθηματικοί και οι κοινωνίες, μέσα στις οποίες ζουν και εργάζονται, αποτελούν μια αδιαχώριστη ενότητα. Μόνον όταν μελετήσουμε τα μαθηματικά ως ένα μέρος της κοινωνικής ανάπτυξης, μπορούμε να επιτύχουμε τη μεγαλύτερη δυνατή κατανόηση της εξέλιξής τους και να δούμε πώς αυτά δημιουργήθηκαν από τις τεχνικές ανάγκες της κοινωνίας για να εξελιχθούν σε θεμελιώδη συστατικά του πολιτισμού μας. Για να μπορέσουμε όμως να δούμε τα μαθηματικά μέσα από μια τέτοια οπτική, είναι αναγκαίο να κοιτάξουμε στην ιστορία τους και να μελετήσουμε τις αλληλεπιδράσεις κάθε φορά μεταξύ κοινωνικής και μαθηματικής ανάπτυξης. Παρακάτω θα αναφέρουμε με συντομία κάποια παραδείγματα τέτοιων αλληλεπιδράσεων, χωρίς να επιμένουμε πολύ στις λεπτομέρειες, τις επιπτώσεις και τις συνέπειες αυτών των αλληλεξαρτήσεων.

Τα μαθηματικά γεννήθηκαν όταν οι υλικές ανάγκες της ζωής απαίτησαν την ύπαρξή τους και όταν η τεχνολογία μιας κάποιας κοινωνίας είχε φθάσει σε ένα κάποιο επίπεδο. Στην αρχή είχαν μόνο έναν προεπιστημονικό, εμπειρικό χαρακτήρα, όπως αναφέρουμε και στην § 1.1, και στη συνέχεια έφθασαν σε ένα πειραματικό επίπεδο, στο επίπεδο της φυσικής επιστήμης, μιας φυσικής του αριθμού και της μορφής. Η γλώσσα των πρωτόγονων λαών μερικές φορές δεν έχει κάποια συγκεκριμένη λέξη για να δηλώσει ένα πλήθος πραγμάτων μεγαλύτερο από τέσσερα. Μετά τα τέσσερα, οι λαοί αυτοί λένε, «Είναι πολλά». Η έννοια του αριθμού γεννιέται από την τεχνική ανάγκη να αποκτήσουμε τον πληθικό αριθμό ενός συνόλου. Ο πρώτος μαθηματικός ήταν ίσως ένας ευφυής βοσκός, που επιθυμούσε να μετρήσει τα πρόβατά του και επινόησε μια τεχνική απαρίθμησης ή αντιστοιχίας των στοιχείων του κοπαδιού του με τα αντικείμενα ενός άλλου συνόλου.

Ακόμη και οι πιο υποτυπώδεις αγροτικές οικονομίες χρειάζονται πληροφορίες σχετικά με τις διάφορες εποχές του χρόνου. Αυτό συνεπάγεται την επίλυση κάποιων προβλημάτων που συνδέονται με την κατασκευή ενός ημερολογίου. Αυτά ακριβώς τα προβλήματα, που είχαν σχέση και με τα προβλήματα της αστρονομίας, ήταν το αντικείμενο μελέτης και των πιο πρωτόγονων ακόμη λαών. Επίσης, η διακόσμηση του ανθρώπινου σώματος, τα διάφορα εργαλεία, η τέχνη της αγγειοπλαστικής και οι ανάγκες της αρχιτεκτονικής, η οποία δημιουργήθηκε όταν οι άνθρωποι άρχισαν να οικοδομούν, απαιτούσαν κάποιες γεωμετρικές αναπαραστάσεις και φυσικά κάποιες γεωμετρικές γνώσεις, οι οποίες, αρχικά βέβαια, παρέμεναν σε μια καθαρά εμπειρική φάση, αργότερα όμως αναπτύχθηκαν σε ένα υψηλότερο επίπεδο.

Οι εμπορικές κοινωνίες εξάλλου, έχουν τεράστια ιστορική σημασία, όσον αφορά την ανάπτυξη των πρώτων μαθηματικών εννοιών και αυτό γιατί μια εμπορική οικονομία στα αρχικά της στάδια δημιουργεί ένα πλήθος από τεχνικά προβλήματα, τα οποία πίεζαν τα μέλη της για εξεύρεση λύσεων. Έτσι, μια τέτοια οικονομία χρειάζεται ένα σύστημα τήρησης λογιστικών βιβλίων, κανόνες για τη διαίρεση των κληρονομιών, μεταφορικά μέσα, τεχνικές για τη συλλογή των φόρων και τη διαχείριση της σοδειάς και γενικά ένα ολόκληρο σύστημα τεχνικών, οι οποίες απαιτούν τη χρήση στοιχείων από την αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία, μηχανική κ.λπ. Με αυτό τον τρόπο και από αυτές τις ανάγκες αναπτύχθηκαν οι γεωμετρικές τεχνικές, για παράδειγμα, στην Αίγυπτο και τη Βαβυλωνία και τα πρώτα στοιχεία της άλγεβρας στην Ινδία και Αραβία. Ιδιαίτερα στην Αίγυπτο, η ανάπτυξη της γεωμετρίας οφείλεται και στις ειδικές ανάγκες που αντιμετώπιζαν οι Αιγύπτιοι από τις πλημμύρες του ποταμού Νείλου, οι οποίες έσβηναν περιοδικά τα σύνορα μεταξύ των αγρών. Τα εδάφη που βρίσκονταν κατά μήκος του Νείλου μπορούσαν να αποδώσουν άφθονη σοδειά από τη στιγμή που θα γινόταν δυνατός ο έλεγχος των πλημμυρών και η σωστή άρδευση. Η ρύθμιση της υδροδότησης έγινε με ανέγερση αναχωμάτων και φραγμάτων, διάνοιξη διωρύγων και κατασκευή δεξαμενών. Όλα αυτά απαιτούσαν προχωρημένες τεχνικές για την εποχή αυτή και είχαν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη των μαθηματικών τεχνικών.

Στην επόμενη φάση ανάπτυξης, αυτές οι μαθηματικές τεχνικές έγιναν κάπως πολύπλοκες και, επομένως, δεν ήταν δυνατό να είναι προσιτές στη μεγάλη μάζα αλλά μόνο στους ειδικούς. Αυτοί ακριβώς οι ειδικοί έπαιρναν θέσεις στην ιεραρχία της άρχουσας κοινωνικής ομάδας και αποτελούσαν ένα θεμελιώδες συστατικό τής εκάστοτε κοινωνικής εξουσίας. Έτσι σιγά σιγά τα μαθηματικά έλαβαν έναν απόκρυφο-μυστικιστικό χαρακτήρα. Η μαθηματική δραστηριότητα έγινε το προνόμιο ορισμένων μεμονωμένων ανθρώπων, ενός, δηλαδή, ιερατείου, το οποίο κατείχε τα απόκρυφα μυστικά και το μονοπώλιο της μαθηματικής γνώσης, κάτι που του προσέδιδε τρομερή δύναμη. Τέτοιο είδος ιερατείου, μια κάστα δηλαδή μεμονωμένων ανθρώπων μυημένων στα μαθηματικά, το συναντάμε σε όλους τους μεγάλους αρχαίους πολιτισμούς (Βαβυλωνίους, Αιγυπτίους, Έλληνες, Κινέζους). Η σημασία όμως αυτού του μυστικισμού είναι μεγάλη για την ανάπτυξη των μαθηματικών και γι' αυτό δεν θα πρέπει να τον παραγνωρίσουμε. Γνωρίσαμε ήδη την επίδραση του Πυθαγόρειου μυστικισμού πάνω στην ανάπτυξη της Ελληνικής επιστήμης και φιλοσοφίας και τη μετάδοσή του από γενιά σε γενιά για αρκετούς αιώνες μετά.

Αν κοιτάξουμε για λίγο την αρχαία Αθηναϊκή κοινωνία, θα δούμε ότι ήταν στην ουσία μια εμπορική δουλοκτητική κοινωνία, που κυβερνιόταν από μια αριστοκρατική δημοκρατία πολιτών. Το οικονομικό της υπόβαθρο στηριζόταν στην εργασία των άφθονων δούλων και γι' αυτό τους αρχαίους Αθηναίους δεν τους ενδιέφεραν καθόλου οι τεχνικές βελτιώσεις οι οποίες, για παράδειγμα, θα αύξαναν την παραγωγικότητα με λιγότερη χειρωνακτική εργασία. Αυτή η κοινωνική δομή έβαλε τη σφραγίδα της καθοριστικά στη διαμόρφωση του χαρακτήρα των Ελληνικών μαθηματικών με τη διακηρυχθείσα αποστροφή για τις πρακτικές εφαρμογές τους. Έτσι ερμηνεύεται και η φιλομάθεια των μελών της αριστοκρατικής τάξης, οι οποίοι δεν δούλευαν χειρωνακτικά αλλά αρέσκονταν στο να διαλογίζονται και να ταξιδεύουν. Αυτή όμως η αποξένωση από την υλική πραγματικότητα οδήγησε τους Αθηναίους στην άρνηση της αξίας αυτής της πραγματικότητας, κάτι που είχε ως επακόλουθο και την πολιτισμική τους παρακμή.

Δεν θα πρέπει επίσης, να μας διαφεύγει το γεγονός ότι αυτή ακριβώς η κοινωνική δομή της Αθηναϊκής κοινωνίας αποτέλεσε και την υλική βάση για την προτίμηση προς την αφαιρετική συλλογιστική σκέψη και την εμπιστοσύνη προς τη δύναμη του καθαρού λόγου και την απόκτηση της αλήθειας μέσω της θαυμαστής τεχνικής της απόδειξης. Η τάση βέβαια για την ανεύρεση της απόλυτης αλήθειας, της ομορφιάς, της αρμονίας και της ενότητας, οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στη μελέτη του πεπερασμένου και εξηγεί το στατικό χαρακτήρα και την έλλειψη κίνησης στα έργα των Ελλήνων γεωμετρών. Είναι γνωστό το επιχείρημα του Ζήνωνα του Ελεάτη, ότι δηλαδή ένα βέλος παραμένει κάθε στιγμή σε ηρεμία και, επομένως, η κίνησή του αμφισβητείται. Ακόμα και για τον Ευκλείδη, κατά την Αλεξανδρινή περίοδο, ο κύκλος δεν θεωρείται ως ο γεωμετρικός τόπος ενός κινούμενου σημείου το οποίο απέχει σταθερή απόσταση από το κέντρο. Ο ορισμός που δίνεται δεν απαιτεί την εισαγωγή της έννοιας της κίνησης. Με αυτήν ακριβώς τη στατική πλευρά των Ελληνικών μαθηματικών έχει σχέση και ο θεμελιώδης ισχυρισμός των Ελλήνων γεωμετρών, ότι δηλαδή οι μόνες αποδεκτές κατασκευές είναι εκείνες που χρησιμοποιούν μόνο κανόνα και διαβήτη. Ο ισχυρισμός αυτός έχει Πυθαγόρεια προέλευση, αφού οι Πυθαγόρειοι πίστευαν στην υπεροχή της ευθείας γραμμής και του κύκλου. Όπως είπαμε και παραπάνω (§1), αυτός ο αντιδιαλεκτικός χαρακτήρας της Ελληνικής γεωμετρίας, σε συνδυασμό και με τις Πυθαγόρειες προκαταλήψεις για την υπεροχή των ακεραίων αριθμών, την αποστροφή των άρρητων και τον αποκλεισμό του απείρου ως αντικειμένου μελέτης, εμπόδισαν την ανάπτυξη της μαθηματικής ανάλυσης και των αλγεβρικών μεθόδων.

Την Αλεξανδρινή εποχή έχουμε βέβαια ένα διαφορετικό κοινωνικό περιβάλλον, το οποίο ήταν περισσότερο εμπορικό και προσανατολισμένο στις μηχανικές μελέτες, πράγμα που έδωσε άλλο χαρακτήρα στα μαθηματικά εκείνης της εποχής. Όπως είπαμε και στην § 1, τα Αλεξανδρινά μαθηματικά ουδέποτε εγκατέλειψαν τις προκαταλήψεις και τις παραδόσεις της Πλατωνικής περιόδου. Ο Αρχιμήδης, ο μεγαλύτερος ίσως μαθηματικός της αρχαιότητας, δεν ήταν ένας αριστοκράτης αργόσχολος διανοούμενος, αλλά πάνω απ' όλα ένας μεγάλος μηχανικός και ταυτόχρονα ένας μεγάλος μαθηματικός. Απαντώντας στις κοινωνικές ανάγκες της πόλης του, βρήκε τα δημιουργικά στοιχεία της εργασίας του στην κοινωνική πραγματικότητα της εποχής του, χρησιμοποιώντας νέες τεχνικές και ιδέες, όπως π.χ. τις τεχνικές των απειροστών, με τις οποίες γίνεται ο προάγγελος του ολοκληρωτικού λογισμού. Αργότερα, ο μεγάλος Διόφαντος, ο προάγγελος της άλγεβρας, έγραψε τις περίφημες εργασίες του, οι οποίες ίσως να μην ήταν άγνωστες στους Ινδούς. Ούτε όμως ο Αρχιμήδης ούτε ο Διόφαντος προχώρησαν στη δημιουργία μιας πρακτικής συμβολικής αντιπροσώπευσης των αριθμών, η οποία ήταν αναγκαία για την ανάπτυξη της μοντέρνας μαθηματικής ανάλυσης.

Αυτό έγινε στην Ινδία όπου συναντάμε έναν πολιτισμό με εμπορική οικονομική βάση, ο οποίος εντελώς φυσιολογικά καλλιέργησε την ανάπτυξη της εμπορικής αριθμητικής και τις γεωμετρικές μελέτες. Οι Ινδοί δεν συμμερίστηκαν ούτε τις φιλοσοφικές προκαταλήψεις των αρχαίων Ελλήνων, ούτε το ενδιαφέρον και την επιμονή τους για απόλυτη αυστηρότητα και, φυσικά, ούτε τις προκαταλήψεις τους έναντι των άρρητων αριθμών. Γι' αυτό εξάλλου και κατάφεραν να φτιάξουν ένα προ-αλγεβρικό αριθμητικό σύστημα, πολύ πιο απλό και εύχρηστο από εκείνο των Ελλήνων. Το Ινδικό σύστημα αρίθμησης ταξίδεψε στη συνέχεια στο Ισλάμ, έναν άλλο πολιτισμό με εμπορική οικονομική βάση και τελικά εισήχθη από τους Άραβες στην Ευρώπη, όπου έγινε αποδεκτό με ενθουσιασμό από τον εμπορικό κόσμο.

Σαν ένα άλλο παράδειγμα εξάρτησης των μαθηματικών από τις κοινωνικές ανάγκες, θα μπορούσαμε να αναφέρουμε την ανάπτυξη του εμπορίου και της ναυσιπλοΐας, καθώς επίσης και την αναζήτηση νέων κόσμων οι οποίοι θα έφερναν πλούτη, δόξα και οικονομική δύναμη στις Ευρωπαϊκές χώρες του Μεσαίωνα και της Αναγέννησης. Η επιθυμία για εξερευνήσεις και για νέους θαλάσσιους δρόμους επιτάχυνε την τεχνική ανάπτυξη, αφού νέα δύσκολα προβλήματα ζητούσαν γρήγορα μια λύση. Εδώ ακριβώς είναι που πρέπει να αναζητήσουμε και να βρούμε τη δυναμική πηγή για την ανάπτυξη της μοντέρνας επιστήμης γενικά και των μαθηματικών ιδιαίτερα. Από τότε μέχρι σήμερα, ασταμάτητα, αυτή η κοινωνική δυναμική ανανεώνεται από γενιά σε γενιά, γιατί η κοινωνική ανάπτυξη σταθερά θέτει στο προσκήνιο νέα τεχνικά προβλήματα, τα οποία πάντα προκαλούν νέα επιστημονική έρευνα. Στις αρχές του 15ου αιώνα κατασκευάστηκαν για τις ανάγκες της υπερατλαντικής ναυσιπλοΐας αστρονομικοί πίνακες, οι οποίοι βασίζονταν στο Πτολεμαϊκό σύστημα. Το πρόβλημα του καθορισμού της θέσης ενός πλοίου στην ανοιχτή θάλασσα πίεζε επιτακτικά να βρει μια λύση. Αυτό έγινε κατορθωτό με την ανάπτυξη ενός πολύ καλού επιπέδου αστρονομικής γνώσης σε συνδυασμό με τη δημιουργία της ουράνιας μηχανικής. Η ουράνια μηχανική οδήγησε αμέσως στη δημιουργία της δυναμικής. Τελικά, άλλες δυναμικές τεχνικές είχαν ως αποτέλεσμα την ανάπτυξη θεμελιωδών μαθηματικών γνώσεων, όπως π.χ. οι πολεμικές τεχνικές των οποίων τα προβλήματα βαλιστικής μπορούσαν να λυθούν μόνο με την επινόηση μιας νέας μηχανικής, της μηχανικής του Γαλιλαίου. Επομένως, η κοινωνική αλλαγή που άρχισε το 15ο αιώνα έκανε αναγκαία την ανάπτυξη της μοντέρνας μηχανικής, η οποία θα ήταν αδύνατο να αναπτυχθεί χωρίς την ανακάλυψη νέων επαναστατικών μαθηματικών μεθόδων.

Τα παραπάνω παραδείγματα είναι νομίζουμε αρκετά, στα πλαίσια της φύσεως αυτού του βιβλίου, για να δείξουν ότι οι πηγές της μαθηματικής σκέψης και γνώσης είναι οι ίδιες μ' αυτές κάθε επιστήμης. Η πίεση δηλαδή των κοινωνικών αναγκών σιγά σιγά μετουσιώνει τις εμπειρικές περιγραφές και διαπιστώσεις στο επίπεδο του επιστημονικού προβληματισμού. Η αρχική λοιπόν ανάπτυξη των μαθηματικών καθορίζεται από το επίπεδο των παραγωγικών δυνάμεων μιας κοινωνίας, κάτι που διαπιστώνεται σε ολόκληρη την ιστορία των μαθηματικών. Ιδιαιτερότητες της μαθηματικής ανάπτυξης αντιστοιχούν σε ιδιαιτερότητες της ανάλογης κοινωνικής ανάπτυξης, έτσι ώστε να υπάρχει μια αντιστοιχία μεταξύ κοινωνικής προόδου και μαθηματικής δραστηριότητας. Οι κοινωνικά, πολιτιστικά και οικονομικά καθυστερημένες χώρες είναι συνήθως εκείνες που έχουν μικρή ή ασήμαντη δραστηριότητα (Moraze 1979). Δεν θα πρέπει, όμως, να κάνει κανείς το λάθος να θεωρήσει ότι αυτή η συσχέτιση και αντιστοιχία είναι απλή, μονοσήμαντη ή γραμμική. Το αντίθετο μάλιστα συμβαίνει· είναι πολύ πολύπλοκη γιατί οι μαθηματικές εξελίξεις με τη σειρά τους έχουν ακόμη μια πιο δυναμική επίδραση στην κοινωνική ανάπτυξη. Αυτές οι συνεχείς αλληλεπιδράσεις μεταξύ της μαθηματικής δραστηριότητας, των εξελίξεων στην επιστήμη και την τεχνολογία και των κοινωνικών εξελίξεων, έχουν έναν ακανόνιστο ρυθμό, ο οποίος μπορεί μεν να είναι ασταθής, αλλά η έντασή του διαρκώς δυναμώνει. Στη σημερινή εποχή ο ρυθμός αυτής της αλληλεπίδρασης γίνεται όλο και πιο έντονος, με αποτέλεσμα να επιταχύνεται η κοινωνική αλλαγή και να ανυψώνεται το επίπεδο και της επιστημονικής παραγωγής αλλά και της τεχνικής δύναμης. Επομένως, τα μαθηματικά εξελίσσονται σε πρωταρχικό παράγοντα διαμόρφωσης της κοινωνίας του μέλλοντος. Με αυτή την έννοια, σε συνδυασμό με τις άλλες επιστήμες και την τεχνολογία, τα μαθηματικά μπορούμε να πούμε ότι αποτελούν τα θεμέλια ενός σύγχρονου ουμανισμού, του επιστημονικού δηλαδή ουμανισμού, ο οποίος στην υπηρεσία μιας ανάλογης κοινωνίας, θα μπορούσε να δώσει κάποια κατεύθυνση στις προσδοκίες και τα οράματα του μοντέρνου ανθρώπου, του πραγματικά σύγχρονου ανθρώπου. Αν δούμε την ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης μέσα από μια τέτοια οπτική, τότε δεν μπορούμε παρά να απορρίψουμε ολοκληρωτικά κάθε μυστικιστική ερμηνεία της εξέλιξής της.

## 2.2 Τα μαθηματικά ως κοινωνική - ανθρώπινη κατασκευή: Παιδαγωγικά συμπεράσματα για τη μαθηματική εκπαίδευση

Όπως δείξαμε και παραπάνω, η ιστορία των μαθηματικών δεν είναι μια διαδικασία αποκάλυψης κάποιων απόλυτων αληθειών αλλά, όπως εξάλλου ολόκληρη η επιστημονική γνώση, το αποτέλεσμα των ιδεών, των συμφερόντων, των αναγκών, των ανταγωνισμών των μελών μιας κοινωνίας και επομένως είναι ένα πολιτισμικό και κοινωνικό προϊόν. Η μαθηματική γνώση είναι μια κοινωνική κατασκευή, το αποτέλεσμα μιας συσσωρευμένης ανθρώπινης εμπειρίας και δεν υπάρχει απλώς ως θεία παρακαταθήκη από αιώνιες αλήθειες, οπότε το μόνο που κάνουν οι εμπνευσμένοι μαθηματικοί είναι να την ανακαλύπτουν και να την παρουσιάζουν στους υπόλοιπους ανθρώπους. Ως ανθρώπινη λοιπόν δραστηριότητα και κατασκευή, τα μαθηματικά είναι το αποτέλεσμα μιας διανοητικής πάλης και προσπάθειας και επομένως η κατεύθυνση της μαθηματικής ανάπτυξης δεν είναι αναγκαστικά μία, όπως και η αλήθεια, εξάλλου, στα μαθηματικά είναι μια σχετική έννοια η οποία εξαρτάται κάθε φορά από το πλαίσιο στο οποίο εξετάζεται.

Αυτή η κοινωνική άποψη για την προέλευση της μαθηματικής γνώσης δεν μπορεί παρά να έχει σημαντικές συνέπειες για τη διδασκαλία των μαθηματικών, για την ανάπτυξη των μαθηματικών προγραμμάτων και γενικά για τη μαθηματική εκπαίδευση. Η ουσία των μαθηματικών δεν βρίσκεται στην αυστηρότητα και αντικειμενικότητά τους αλλά στη διαδικασία της μαθηματικής σκέψης. Πράγματι, η Πλατωνική άποψη στην αρχαία Ελλάδα ήταν ότι οι μαθηματικές προτάσεις αντιπροσώπευαν αιώνιες αλήθειες, οι οποίες ήταν ακριβή αντίγραφα του απόλυτου και της βεβαιότητας. Τα αξιώματα του Ευκλείδη, για παράδειγμα, δεν θεωρούνταν ως προβληματικά αλλά ως αυτοπροφανή θεμέλια πάνω στα οποία μπορούσε να στηριχθεί ολόκληρο το σύστημα της γεωμετρίας. Μετά την ανάπτυξη των μη-Ευκλείδειων γεωμετριών, μετά το 1800, το σύστημα της γεωμετρικής σκέψης άρχισε να θεωρείται ως το αποτέλεσμα ενός ειδικού συνόλου από εικασίες. Η αλλαγή της προοπτικής οδηγεί σε ένα νέο σύνολο εικασιών, το οποίο οδηγεί στην ανάπτυξη ενός διαφορετικού μοντέλου γεωμετρίας. Ο απολυτισμός έχει δεχθεί ισχυρό πλήγμα από το σχετικισμό του Αϊνστάιν και τον αγνωστικισμό του Gödel. Αυτό έχει ως συνέπεια οι αποδείξεις να θεωρούνται ουσιαστικές μόνο σε ένα συγκεκριμένο κάθε φορά αξιωματικό σύστημα και, επομένως, σχετικές όσον αφορά τα διάφορα συστήματα. Η αντικειμενικότητα θεωρείται στην καλύτερη περίπτωση ως σχετική και στη χειρότερη εγκαταλείπεται ολοκληρωτικά. Το 1972 ο Morris Kline (1972, p. 481) έγραψε: «Τα μαθηματικά δεν είναι μια δομή από ατσάλι η οποία βασίζεται πάνω στα θεμέλια της αντικειμενικής πραγματικότητας, αλλά ένας ιστός αράχνης που πάλλεται μαζί με άλλες σκέψεις στους μερικά μόνο εξερευνήσιμους χώρους του ανθρώπινου μυαλού».

Τα μαθηματικά τα οποία τελικά κωδικοποιούνται και εμφανίζονται στα περιοδικά ή τα επιστημονικά και σχολικά βιβλία, στο πλαίσιο μιας αυστηρής αξιωματικής θεμελίωσης, είναι το αποτέλεσμα μιας επίπονης ανακαλυπτικής-εξερευνητικής διαδικασίας, την οποία τόσο ζωντανά και παραστατικά έχουν περιγράψει οι Davis και Hersh στο θαυμαστό βιβλίο τους

(Davis και Hersh 1983). Αυτή η διαδικασία είναι εντελώς προσωπική και έχει μια ημιεμπειρική, διαισθητική και δημιουργική βάση. Αν και το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας είναι λογικά αυστηρό, το διανοητικό ταξίδι προς επίτευξη αυτού του αυστηρού αποτελέσματος περιλαμβάνει συνήθως δυσκολίες, πισωγυρίσματα, παγίδες, επιτυχίες όσο και αποτυχίες και γενικά όλα τα στοιχεία μιας αληθινής όσο και μαγευτικής περιπέτειας, που δυστυχώς λόγω εξοικονόμησης χώρου και χρόνου, αλλά και από παράδοση, δεν περιγράφεται στα διάφορα μαθηματικά συγγράμματα. Έτσι, εκείνο που φαίνεται τελικά είναι το τελικό προϊόν και όχι η πορεία της ανθρώπινης μαθηματικής σκέψης, η οποία παρήγαγε αυτό. Υποτιμώντας όμως την πορεία και τη διαδικασία της μαθηματικής σκέψης και υπερτιμώντας ταυτόχρονα το τελικό προϊόν, υποτιμούμε ουσιαστικά τον μαθηματικό ο οποίος παρήγαγε αυτό το αποτέλεσμα. Αυτή ακριβώς η απροσωποποίηση αλλάζει το χαρακτήρα της διαδικασίας και ταυτόχρονα ενισχύει την παραδοσιακή κοινωνική άποψη των μαθηματικών, σύμφωνα με την οποία τα μαθηματικά είναι κατάλληλα μόνο για μια χούφτα προικισμένων ανθρώπων, μια κλειστή λέσχη εμπνευσμένων προνομιούχων ατόμων, οι οποίοι έχουν τους δικούς τους αυστηρούς κανόνες και μιλούν τη δική τους γλώσσα. Για τη μαθηματική εκπαίδευση, αυτή η κοινωνική άποψη των μαθηματικών είναι επιζήμια και οδηγεί σε ελιτίστικες, επικίνδυνες θεωρίες για τη μαθηματική ικανότητα και τη δυνατότητα εξοικείωσης ολόκληρου του μαθητικού πληθυσμού με το πολιτισμικό αγαθό των μαθηματικών. Αντιθέτως, η άρνηση φετιχοποίησης του μαθηματικού προϊόντος και η απομυθοποίηση των μαθηματικών μέσα από την έμφαση στις διαδικασίες παραγωγής της μαθηματικής γνώσης επιτρέπει τον εξανθρωπισμό του μαθήματος και δίνει τη δυνατότητα σε ολόκληρο το μαθητικό πληθυσμό να γευτεί τα μορφωτικά αγαθά του, προσφέροντας κατάλληλες διδακτικές τεχνικές και εξοπλισμό, προσαρμοσμένο στις διαφορετικές κάθε φορά ανάγκες του μαθητή.

Ποια παιδαγωγική στάση όμως, είναι η πιο κατάλληλη και πιο σύμφωνη με την άποψη των μαθηματικών ως κοινωνική-ανθρώπινη κατασκευή, η οποία βασίζεται πάνω στη μη-πληρότητα, την εικασία, τη διανοητική πάλη και τη σχετικότητα; Μέχρι πρόσφατα, όπως μας αποκαλύπτει η ιστορική παιδαγωγική, οι δάσκαλοι των μαθηματικών θεωρούσαν τους μαθητές τους ως κενά δοχεία, τα οποία έπρεπε να γεμίσουν με μαθηματικές γνώσεις. Ο μαθητής λοιπόν, εξαρτιόταν στην κυριολεξία από το δάσκαλο, ο οποίος ήταν υπεύθυνος να γεμίσει με μαθηματικές γνώσεις αυτό το δοχείο, μέσω της μεταφοράς της γνώσης από το δάσκαλο στο μαθητή. Ο τελευταίος μετατρεπόταν σε έναν παθητικό αποδέκτη της διαδικασίας μεταφοράς της γνώσης, η οποία υποτίθετο ότι λειτουργούσε ευθύγραμμα, ομαλά, χωρίς προβλήματα για τους μαθητές, αρκεί να ήταν επιμελείς, υπάκοοι και πειθαρχημένοι. Εάν αποδεχθούμε όμως την άποψη σύμφωνα με την οποία η μαθηματική γνώση είναι ένα κοινωνικό-ανθρώπινο κατασκεύασμα, τότε θα πρέπει και η μάθησή της να βασίζεται στους ίδιους κανόνες εξερεύνησης και κατασκευής, οι οποίοι διέπουν την παραγωγή της. Επομένως, η έμφαση μετατοπίζεται από το τελικό προϊόν της γνώσης, που στην περίπτωσή μας είναι οι διάφορες μαθηματικές προτάσεις και θεωρήματα, στη διαδικασία απόκτησής τους, από το κυνηγητό του «σωστού» στην αναγνώριση της παιδαγωγικής αξίας που μπορεί να έχει το «λάθος», από τη μοναδική απόλυτη άποψη για το τι είναι αληθές ή για το τι συνιστά λύση ενός προβλήματος στην αναγνώριση των εναλλακτικών απόψεων και οπτικών θεώρησης ενός μαθηματικού γεγονότος ή προβλήματος. Οι μαθητές αναγνωρίζονται πλέον ως ζωντανά άτομα, τα οποία σκέπτονται και παίρνουν αποφάσεις προσπαθώντας να κατακτήσουν τη νέα γνώση μέσα από το πλαίσιο της προηγούμενης γνώσης και εμπειρίας. Ο ρόλος του δασκάλου δεν είναι πια να εξηγεί και να μεταδίδει πληροφορίες και γνώσεις, παριστάνοντας την αυθεντία, αλλά να κινητοποιεί και να παρακινεί το μαθητή, παρασύροντάς τον στην περιπέτεια της μάθησης, καθοδηγώντας τον και διευκολύνοντάς τον μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένες δραστηριότητες, εξερευνήσεις και προβληματισμούς στο να κατασκευάσει μόνος του τη νέα γνώση. Η μεγάλη ευθύνη του δασκάλου βρίσκεται στο να κατορθώσει να δημιουργήσει ένα κατάλληλο μαθησιακό κλίμα μέσα στην τάξη, έτσι ώστε όλοι οι μαθητές, αν είναι δυνατό, να νιώσουν τα συναισθήματα της ευχαρίστησης, του ενδιαφέροντος και της επιτυχίας.

## 3. Η εξέλιξη της μαθηματικής εκπαίδευσης

Από τα πρώτα χρόνια ακόμη που εμφανίστηκαν τα αρχικά ψήγματα της μαθηματικής γνώσης, δημιουργήθηκε η ανάγκη να μεταφερθεί αυτή η γνώση στις επόμενες γενιές, οι οποίες και θα συνέχιζαν την παράδοση, εμπλουτίζοντάς την με νέα επιτεύγματα. Αυτή ήταν μια φυσική ανάγκη που δημιουργήθηκε, μπορούμε να πούμε, αυθόρμητα και ικανοποιήθηκε ενστικτωδώς στην αρχή με δασκάλους τους παλαιότερους και μαθητές τους νεότερους, χωρίς βέβαια την ίδρυση κάποιων ειδικών θεσμών. Οι εμπειρίες στην αρχή μεταδίδονταν από στόμα σε στόμα και μέσω της πρακτικής, με σκοπό την ικανοποίηση των στοιχειωδών αναγκών της υλικής ζωής. Από τότε ακριβώς μπορούμε να μιλάμε πια για τις απαρχές της μαθηματικής εκπαίδευσης.

### 3.1 Η μαθηματική εκπαίδευση στους πρώτους αρχαίους πολιτισμούς

Μολονότι έχει διατυπωθεί η εικασία ότι το μέτρημα ως πράξη και διαδικασία άρχισε για πρώτη φορά στις προϊστορικές φυλές, οι οποίες χαρακτηρίζονταν από τον κοινοτικό τρόπο συμβίωσης γύρω στο 10000 π.Χ., εντούτοις οι πρώτες μας γνώσεις σχετικά με την τυπική μαθηματική εκπαίδευση έρχονται από τις Βαβυλωνιακές πήλινες πλάκες και τους Αιγυπτιακούς παπύρους. Ο πάπυρος του Ahmes, γύρω στα 1650 π.Χ., ήταν αντίγραφο από παπύρους που γράφτηκαν 200 χρόνια περίπου νωρίτερα και μοιάζει κάπως με ένα σχολικό εγχειρίδιο. Οι εκσκαφές επίσης στην Εγγύς Ανατολή αποκάλυψαν δωμάτια που έμοιαζαν πάρα πολύ με αίθουσες σχολείων. Οι γραμματείς, οι λόγιοι και οι ιερείς έπρεπε να εκπαιδευτούν να κρατούν βιβλία σχετικά με το εμπόριο, τους φόρους, τη γη και το ημερολόγιο. Αυτό που μπορεί να διακρίνει, βέβαια, αμέσως κανείς σ' αυτά τα αρχαία μαθηματικά κείμενα είναι ότι περιέχουν πληροφορίες και αλγόριθμους για την επίλυση πρακτικών προβλημάτων χωρίς καθόλου θεωρία.

Οι πρώτες πιο ολοκληρωμένες γνώσεις σχετικά με την τυπική μαθηματική εκπαίδευση ως θεσμού πια, μας έρχονται από την αρχαία Αθήνα του 6ου και του 7ου αιώνα π.Χ. Την εποχή του Σόλωνα γνωρίζουμε ότι το κράτος πλήρωνε δίδακτρα για τα παιδιά των πολιτών που έπεφταν στη μάχη. Υπήρχαν δύο τύποι εκπαίδευσης για τις δυο τάξεις των πολιτών: Οι ελεύθερες σπουδές για τα παιδιά των ελεύθερων πολιτών, οι οποίοι συμμετείχαν στη διακυβέρνηση της πόλης και οι πρακτικές σπουδές για τις κατώτερες τάξεις ή τους δούλους. Λέγονται διάφορες ιστορίες και ενδιαφέροντα ανέκδοτα για τη μαθηματική εκπαίδευση των πρώτων Ελληνικών χρόνων.

Για παράδειγμα, κυκλοφορούν δύο εκδοχές για το ποιος ήταν ο πρώτος δάσκαλος ο οποίος δίδαξε μαθηματικά με χρηματική αμοιβή. Η πρώτη εκδοχή αναφέρει ότι γύρω στο 520 π.Χ. ένα μέλος της σχολής των Πυθαγορείων είχε χάσει την περιουσία του και εξαιτίας της δυσκολίας που τον εκτόπισε, η αδελφότης των Πυθαγορείων τον επέτρεψε να αποκτήσει την περιουσία του διδάσκοντας γεωμετρία επί αμοιβή. Η δεύτερη εκδοχή αναφέρει ότι ο Ιπποκράτης το 450 π.Χ., που ήταν ένας έμπορος, συνελήφθη από τους πειρατές. Ενώ παρέμενε στην Αθήνα περιμένοντας να γίνει η δίκη στην οποία επιχείρησε να ανακτήσει την ελευθερία του, δίδαξε την επιστήμη αυτή για να εξοικονομήσει τα χρήματα που θα του επέτρεπαν να υποστηρίξει τον εαυτό του στο δικαστήριο.

Πολύ πιο γνωστές είναι οι ιστορίες για τη ζωή και το έργο του Πυθαγόρα, ο οποίος μετά την επιστροφή του από την Αίγυπτο, όπου μυήθηκε στα Αιγυπτιακά μαθηματικά, ίδρυσε την περίφημη σχολή του η οποία έπαιξε τόσο σπουδαίο ρόλο στη διαμόρφωση των Ελληνικών μαθηματικών. Όπως αναφέρει ο sir Thomas Heath (1981, p. 25), ο Πυθαγόρας αρχικά πλήρωνε στον κάθε μαθητή του το ισοδύναμο ποσό των 6 οβολών για κάθε θεώρημα που μάθαινε, γιατί στην αρχή τον ενδιέφερε να έχει τους πρώτους μαθητές του. Συνέχιζε την ίδια τακτική μέχρις ότου ο μαθητής ενθουσιαζόταν τόσο πολύ από τα μυστικά των μαθηματικών, ώστε στο τέλος παρακαλούσε τον Πυθαγόρα να τον κρατήσει στη σχολή για να τον μυήσει ακόμη πιο βαθιά στη μαθηματική επιστήμη, ακόμη κι αν αυτός τώρα έπρεπε να πληρώνει για κάθε θεώρημα το ίδιο ποσό.

Ο Σωκράτης παραμένει πιο γνωστός, ίσως, ως ο μεγαλύτερος δάσκαλος της εποχής του με τη μεγαλύτερη συνεισφορά στην ιστορία της μαθηματικής εκπαίδευσης. Κλασικός έχει μείνει πια ο διάλογος με τον Μένωνα, ένα νεαρό αγράμματο δούλο, μέσω του οποίου προσπαθεί να τον διδάξει γεωμετρία. Εδώ έχει τις ρίζες της η Σωκρατική μέθοδος διδασκαλίας, κατά την οποία οι μαθητές αναγκάζονται να αποδεχθούν ένα συμπέρασμα, το οποίο συχνά είναι ξένο προς την αρχική τους διαίσθηση, μέσω από μια αριστοτεχνική ακολουθία ερωτήσεων. Η τέχνη των ερωτήσεων χρησιμοποιείται ευρέως και στη σύγχρονη διδακτική, όχι όμως μ' αυτή τη μορφή του Σωκρατικού διαλόγου, γιατί υπάρχει κίνδυνος να οδηγηθεί ο μαθητής στο επιθυμητό αποτέλεσμα εντελώς παθητικά και μηχανικά, σαν υπνωτισμένος, χωρίς να συμμετέχει ουσιαστικά στη διαδικασία μάθησης. Η σύγχρονη διδακτική χρησιμοποιεί τις ερωτήσεις στις ευρετικές μορφές διδασκαλίας μέσω των οποίων, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4, ο μαθητής οδηγείται, περισσότερο από μόνος του, να ανακαλύψει τη νέα γνώση για τον εαυτό του.

Μολονότι ο Πλάτων δεν ήταν μαθηματικός, όπως και ο Σωκράτης άλλωστε, η μάθηση των μαθηματικών στην ακαδημία του κατείχε πρωτεύουσα θέση. Τα μαθηματικά που διδάσκονταν στην ακαδημία περιλάμβαναν αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία και μουσική. Οι μαθητές της ακαδημίας δεν ήταν νέοι και αρχάριοι στα μαθηματικά, αλλά άνδρες με ώριμη μαθηματική σκέψη, οι οποίοι μπορούμε να πούμε ότι έκαναν κάτι σαν μεταπτυχιακές σπουδές. Η ακαδημία ήταν, ιστορικά, το πρώτο ινστιτούτο ή ερευνητικό κέντρο για προχωρημένες μελέτες στα μαθηματικά. Όπως μας πληροφορεί ο Πλάτων στην *Πολιτεία* του, τα μαθηματικά ήταν ένα σπουδαίο μάθημα το οποίο προοριζόταν για την εκπαίδευση των φιλοσόφων - αριστοκρατών, της πρώτης ιεραρχικά κοινωνικής τάξης, κατά την περίοδο από 20 έως 30 ετών. Ο βασικός σκοπός διδασκαλίας των μαθηματικών σε αυτή την κάστα ήταν η εκγύμναση του μυαλού, το ακόνισμα της κρίσης και της σκέψης και η καλλιέργεια της διανοητικής πειθαρχίας, ένας σκοπός που συνεχίζει από τότε μέχρι και σήμερα να θεωρείται από τους πιο βασικούς για τη διδασκαλία των μαθηματικών, μολονότι η παιδαγωγική ψυχολογία έχει πια αποδείξει ότι δεν υπάρχουν ειδικά μαθήματα για να γυμνάσουν ειδικές λειτουργίες του μυαλού (Stanik 1986).

Ο Αριστοτέλης επίσης πίστευε ότι η γενική εκπαίδευση των ελεύθερων πολιτών ήταν ουσιώδης για τη δημιουργία μιας συνεκτικής κοινότητας και ενός συγκροτημένου κράτους. Πίστευε ότι τα μικρά παιδιά θα έπρεπε να αποκτήσουν ηθική και φυσική εκπαίδευση μέσω του παιγνιδιού μέχρι την ηλικία των 14 ετών, οπότε θα ήταν έτοιμα πια για πιο απαιτητικές διανοητικές επιδιώξεις. Στην άποψη αυτή του Αριστοτέλη βρίσκουμε τους πρώτους προβληματισμούς γύρω από την κατάσταση «ετοιμότητας» για μάθηση, ένα πρόβλημα το οποίο απασχόλησε και απασχολεί έντονα και στις μέρες μας τη γνωστική ψυχολογία και το οποίο προσπαθεί να διερευνήσει πότε και κάτω από ποιες συνθήκες το παιδί είναι έτοιμο πλέον για τις πιο αφηρημένες και πολύπλοκες διανοητικές λειτουργίες.

## 3.2 Η μαθηματική εκπαίδευση το Μεσαίωνα και την Αναγέννηση

Η πρώτη πραγματεία πάνω στις εκπαιδευτικές μεθόδους, με τίτλο *Σχολεία Ρητορικής*, μπορεί να αποδοθεί στον Ρωμαίο Quintillian γύρω στα 35 έως 100 μ.Χ. (Jones, 1967). Στην εργασία αυτή γινόταν αναφορά στις ατομικές διαφορές των μαθητών απέναντι στη μάθηση και διατυπωνόταν η άποψη ότι ο κάθε μαθητής θα έπρεπε να επιλέγει τα μαθηματικά της αρεσκείας του, έτσι ώστε να του παρέχεται η ευκαιρία να αναπτύσσει το ταλέντο του και τις ιδιαίτερες κλίσεις και ικανότητές του. Στα μαθηματικά δινόταν ιδιαίτερη σημασία και τονιζόταν κυρίως η διδασκαλία των μεθόδων της απόδειξης, καθώς επίσης και η απομνημόνευση ως η πιο σπουδαία διδακτική μέθοδος για τη διδασκαλία των μαθηματικών, κάτι που δεν φαινόταν να έρχεται σε αντίθεση με την έμφαση προς τις αποδεικτικές μεθόδους.

Τα μεσαιωνικά χρόνια έχουμε τα μοναστηριακά σχολεία. Οι πρώτες οδηγίες και υποτυπώδεις διδακτικές και παιδαγωγικές αρχές, φαίνεται να δόθηκαν από τους Ιησουίτες κατά το 16ο αιώνα σ' εκείνα τα μέλη τους τα οποία προορίζονταν να διδάξουν στα σχολεία αυτά. Την εποχή αυτή άρχισε να αναπτύσσεται ένα διπλός τύπος εκπαίδευσης. Ο πρώτος τύπος προοριζόταν για τους μαθητές που προέρχονταν από τα μεσαία κοινωνικά στρώματα. Οι μαθητές αυτοί χρησιμοποιούσαν συνήθως ιδιωτικούς δασκάλους και η εκπαίδευσή τους ήταν προσανατολισμένη προς τις εφαρμογές και τις επαγγελματικές χρήσεις των μαθηματικών, ιδιαίτερα αυτές που σχετίζονταν με το εμπόριο, την τοπογραφία και τη ναυσιπλοΐα. Ο δεύτερος τύπος της εκπαίδευσης προοριζόταν για τα παιδιά της ανώτερης κοινωνικής τάξης και είχε σκοπό να δημιουργήσει «χριστιανούς αριστοκράτες».

Γι' αυτό η εκπαίδευσή τους περιείχε λίγα μαθηματικά, ενώ η έμφαση δινόταν στις λεγόμενες ανθρωπιστικές κυρίως σπουδές, με πρωταγωνιστικό ρόλο στο μάθημα των λατινικών. Τα λατινικά και τα μαθηματικά ήταν γενικά τα δύο βασικά μαθήματα της εκπαίδευσης των νέων, επειδή θεωρούνταν ότι γυμνάζουν το μυαλό και ακονίζουν την κρίση και τη λογική.

Βέβαια, την εποχή της Αναγέννησης έχουμε τις πρώτες αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση, όπου και γίνεται αυστηρή κριτική στη σχολαστική μορφή της εκπαίδευσης, η οποία βασιζόταν κυρίως στη στείρα απομνημόνευση και τόνιζε ιδιαίτερα τις θεωρητικές - αφηρημένες πλευρές των μαθηματικών. Άρχισαν σιγά σιγά να δημοσιεύονται τα πρώτα βιβλία μαθηματικών που ξέφευγαν από το πνεύμα του Ευκλείδη και έδιναν έμφαση στις πρακτικές κυρίως εφαρμογές και χρήσης των μαθηματικών, περιλαμβάνοντας κεφάλαια από την αριθμητική, γεωμετρία, τριγωνομετρία, αστρονομία, ημερολόγιο, γεωγραφία, οπτική, μηχανική και μουσική (Jones 1967).

## 3.3 Η νεότερη μαθηματική εκπαίδευση

Με την είσοδο του 19ου αιώνα σήμανε και η αρχή της βιομηχανικής περιόδου για πολλές χώρες. Οι αυξημένες ανάγκες της νέας βιομηχανικής κοινωνίας δημιουργούσαν τις προϋποθέσεις για ένα νέο προσανατολισμό της εκπαίδευσης, στην οποία το μάθημα των μαθηματικών έμελλε να παίξει έναν όλο και πιο σημαντικό ρόλο. Έτσι άρχισαν να δημιουργούνται σιγά

σιγά τα κρατικά σχολεία, Πρωτοβάθμιας στην αρχή Εκπαίδευσης για τα παιδιά της εργατικής τάξης και Δευτεροβάθμιας αργότερα για τα παιδιά κυρίως της νέας ανερχόμενης αστικής τάξης (Griffiths και Howson 1974, p. 13). Στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση η διδασκαλία περιοριζόταν στη στοιχειώδη αριθμητική, με σκοπό να καλλιεργηθούν στους μαθητές κάποιες υπολογιστικές δεξιότητες χρήσιμες στην κατοπινή ζωή τους. Το πρόγραμμα στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση περιλάμβανε, εκτός από την αριθμητική, στοιχεία άλγεβρας, στοιχεία Ευκλείδειας γεωμετρίας και τριγωνομετρίας (Rogers 1981).

Η αυξανόμενη βελτίωση της θέσης των μαθηματικών στα σχολικά προγράμματα και η προοδευτική διαμόρφωσή τους σε ανεξάρτητο μάθημα, συνοδεύτηκε, όπως ήταν επόμενο, και από ένα αντίστοιχο ενδιαφέρον γύρω από την παιδαγωγική του μαθήματος. Έτσι το 19ο αιώνα βλέπουμε να αναπτύσσεται ένα πραγματικό ενδιαφέρον για την παιδαγωγική του μαθήματος των μαθηματικών, που περιλάμβανε προβληματισμούς γύρω από τα προγράμματα, τους σκοπούς και τις μεθόδους διδασκαλίας. Τότε δημοσιεύτηκαν οι πρώτες εργασίες και εκδόθηκαν τα πρώτα περιοδικά που, ανάμεσα στα άλλα, είχαν και ως σκοπό να βελτιώσουν τη διδασκαλία των μαθηματικών. Μεγάλοι μαθηματικοί όπως οι Lacroix (1805), Gergonne (1810), Laisant (1899), Felix Kline (1893) και άλλοι, δημοσίευσαν βιβλία με τα οποία αναφέρθηκαν σε παιδαγωγικά και φιλοσοφικά προβλήματα της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στις αρχές βέβαια του 19ου αιώνα η καθιερωμένη μέθοδος διδασκαλίας του μαθήματος ήταν «να παρουσιάζεται ένας κανόνας, να δίνονται παραδείγματα και να προσφέρονται προβλήματα για λύση» (Jones και Coxford 1970). Αργότερα, στα μέσα του αιώνα, η παιδαγωγική των μαθηματικών άρχισε σιγά σιγά να ενσωματώνει τις αντιλήψεις και τις αρχές της θεωρίας των χωριστών διανοητικών λειτουργιών (Faculty Psychology). Αυτή ήταν η κυρίαρχη ψυχολογική θεωρία της εποχής, που δίδασκε ότι οι διανοητικές ικανότητες είναι δυνατό να βελτιωθούν με τη συνεχή εξάσκηση και καλλιέργεια που προσφέρουν κάποια μαθήματα, ειδικά για κάθε μια απ' αυτές. Η διδασκαλία, για παράδειγμα, της αριθμητικής, θεωρούνταν ιδιαίτερα κατάλληλη για την ανάπτυξη της ανθρώπινης σκέψης, λογικής και κρίσης. Αυτή ακριβώς η ψυχολογική θεωρία συνέβαλε τα μέγιστα στην πλατιάς αποδοχής λαϊκή αντίληψη ότι τα μαθηματικά διδάσκονται για να δυναμώνουν το μυαλό (Stanic 1986).

Η δικαιολογία, για τη λατρεία της αριθμητικής, βασιζόταν στο επιχείρημα πως την επιστήμη αυτή διαπερνούσε το πνεύμα της λογικής. Παρουεξετάζοντάς την λοιπόν, βασικά σαν μια αξιωματικο-παραγωγική επιστήμη – με αξιώματα, θεωρήματα, αποδείξεις – ανάλογη προς τη γεωμετρία, έλπιζαν να δείξουν ότι η θεωρητική αριθμητική ακονίζει και διευρύνει τις ικανότητες της σκέψης και είναι ένα σύστημα διανοητικής γυμναστικής. Έτσι η αριθμητική διδασκόταν όχι τόσο επειδή αποτελούσε ένα μέρος των μαθηματικών, αλλά μάλλον επειδή γύμναζε τους μαθητές και σε άλλες γενικότερες δεξιότητες.

Η θεωρία βέβαια αυτή αναθεωρήθηκε και σήμερα θεωρείται από επιστημονικής άποψης «το πιο μεγάλο σφάλμα στην ανθρώπινη σκέψη» (Strom 1969, p. 147). Γιατί, όπως έχει διαπιστωθεί, κάθε τομέας είναι και μια «πειθαρχία» (discipline), με δικό της σύστημα οργάνωσης της γνώσης και δική της μεθοδολογία, που εξασκεί μια ορισμένη επίδραση στον ανθρώπινο νου. Δεν υπάρχουν ανώτερα μαθήματα που ασκούν υπέρτερη επίδραση και που είναι καταλληλότερα από άλλα για να «ακονίζουν» το μυαλό. Δεν υπάρχει, δηλαδή, βασιλική οδός που να οδηγεί στην ανάπτυξη της λογικής σκέψης, της κρίσης και του ανθρώπινου νου.

Από τις αρχές του 20ού αιώνα τα μαθηματικά προγράμματα της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης σιγά σιγά άρχισαν να αλλάζουν σε αξιοσημείωτη έκταση για να απαντήσουν στις αυξανόμενες απαιτήσεις της κοινωνίας, στην έκρηξη του μαθητικού πληθυσμού και στις νέες αντιλήψεις γύρω από τη φύση των μαθηματικών και τη γενικότερη λειτουργία τους στην εκπαίδευση. Ενώ κατά το 19ο αιώνα, ο σκοπός της διδασκαλίας των μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση ήταν κυρίως η προετοιμασία των μελλοντικών μαθηματικών, τώρα ο σκοπός τους αρχίζει να γίνεται η εκπαίδευση ικανών - μορφωμένων πολιτών. Η αντιπολίτευση της θεωρίας των χωριστών διανοητικών λειτουργιών, οδήγησε στην αντικατάστασή της από την ψυχολογία της συμπεριφοράς και της θεωρίας των δεσμών (Κεφάλαιο 3). Έτσι δεν υπήρχε λόγος πια οι παιδαγωγοί να βλέπουν τα μαθηματικά πρωταρχικά σαν μια καλλιέργεια του νου, ή να πιστεύουν πως είναι μια σκληρή δοκιμασία για τους λίγους. Ήταν πλέον ελεύθεροι να τα θεωρούν σαν ένα μάθημα που πρόσφερε χρήσιμη γνώση.

Η τρομακτική πρόοδος στην ποιοτική ανάπτυξη των μαθηματικών, που οφειλόταν κυρίως στις εργασίες των Peano, Klein, Hilbert και Poincaré, άρχισε να επηρεάζει και το πνεύμα των σχολικών μαθηματικών, αποκαλύπτοντας τις σοβαρές τους ελλείψεις και καλλιεργώντας την τάση για μεγαλύτερη ακρίβεια και αυστηρότητα. Οι σκοποί διδασκαλίας των μαθηματικών άρχισαν σιγά σιγά να αναθεωρούνται και οι μέθοδοι διδασκαλίας να απομακρύνονται από την αποστήθιση και τη μηχανική εργασία και να δινουν έμφαση στην ανεξάρτητη σκέψη και ενεργητική συμμετοχή (Τουμάσης 1989, σ. 35). Το υπόβαθρο για την ανάπτυξη των επαναστατικών, θα λέγαμε, μεταρρυθμίσεων, που έκαναν την εμφάνισή τους στη μαθηματική εκπαίδευση, σε παγκόσμιο επίπεδο, μετά το 1950, διαμορφώθηκε από τις βαθιές κοινωνικο-οικονομικές αλλαγές και θεμελιακές επιστημονικές εξελίξεις, οι οποίες πραγματοποιήθηκαν μετά το Β΄ παγκόσμιο πόλεμο. Ο ρόλος των μαθηματικών στην πραγματοποίηση των τεράστιων τεχνολογικών επιτευγμάτων της εποχής μας, ήταν πρωταγωνιστικός. Με τον ερχομό της ατομικής εποχής δημιουργήθηκαν νέα πεδία ακαδημαϊκής και βιομηχανικής έρευνας (θεωρητική φυσική, ατομική φυσική, ηλεκτρονική κ.λπ.), τα οποία στηρίζονταν στην υψηλού επιπέδου μαθηματική εκπαίδευση και έρευνα. Στις αρχές επίσης της δεκαετίας του 1950, οι ηλεκτρονικοί υπολογιστές άρχισαν να κάνουν την εμφάνισή τους σταθερά στην αγορά, σφραγίζοντας έτσι τη νέα εποχή της πληροφορικής. Οι υπολογιστές άρχισαν να γίνονται απαραίτητοι στη βιομηχανία και την έρευνα και, όπως ήταν επόμενο, νέες επαγγελματικές ευκαιρίες δημιουργήθηκαν, οι περισσότερες από τις οποίες απαιτούσαν υψηλή μαθηματική κατάρτιση. Έτσι όλες αυτές οι ραγδαίες εξελίξεις έκαναν επιτακτική πια τη μεταρρύθμιση της μαθηματικής εκπαίδευσης και επηρέασαν, όπως ήταν επόμενο, τις νέες κατευθύνσεις των προγραμμάτων και των μεθόδων διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών από το 1960 μέχρι σήμερα.

Πράγματι, η μαθηματική εκπαίδευση τα τελευταία 40 χρόνια δέχτηκε τέτοιες μεταρρυθμίσεις και αλλαγές σε παγκόσμιο επίπεδο, που όμοιές της δεν είχε γνωρίσει ποτέ στο παρελθόν. Οι μεταρρυθμίσεις έγιναν σε τέσσερα κύματα. Το πρώτο κύμα εκδηλώθηκε στις ΗΠΑ στις αρχές της δεκαετίας του 1950 και ήταν αποτέλεσμα κυρίως του ενδιαφέροντος των πανεπιστημιακών καθηγητών να συμπεριλάβουν στα πανεπιστημιακά και σχολικά προγράμματα μερικές από τις νέες ιδέες που ριζοσπαστικοποίησαν τη μαθηματική επιστήμη τα προηγούμενα 100 χρόνια (Suydam και Osborne 1977, p. 13). Η κίνηση αυτή όμως, δεν βρήκε πρόσφορο έδαφος εφόσον ακόμη δεν είχε εμφανιστεί το ισχυρό πολιτικο-οικονομικό κίνητρο για να την επιβάλει και στην ουσία δεν είχε σημαντικές επιπτώσεις στα σχολικά μαθηματικά.

Το δεύτερο κύμα των μεταρρυθμίσεων πραγματοποιήθηκε στις δεκαετίες 1960 και 1970, όπου και συντελέστηκαν οι μεγαλύτερες και ποιοτικά βαθύτερες αλλαγές στα σχολικά μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας όσο και της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης στις περισσότερες χώρες του κόσμου. Τα μαθηματικά που διαμορφώθηκαν σαν αποτέλεσμα αυτών των προσπαθειών, επικράτησε να λέγονται «νέα» ή «μοντέρνα» μαθηματικά. Τα σημαντικότερα ήταν τα εξής*:

i) Οι μεγάλοι πρόοδοι που συντελέστηκαν στη μαθηματική επιστήμη τα τελευταία 100 χρόνια.
ii) Η ριζική αλλαγή των αντιλήψεων γύρω από τη φύση των μαθηματικών, που προήλθε κυρίως από τις εργασίες των διαφόρων φιλοσοφικών σχολών (λογικιστών, φορμαλιστών, ενορατιστών) πάνω στα θεμέλια των μαθηματικών (βλέπε Κεφάλαιο 2).
iii) Η ανάδυση της συνολοθεωρίας ως ενοποιητικής έννοιας, προπαντός μέσα από την εργασία των Bourbaki (Van der Bliz et al, 1981).
iv) Η εισαγωγή νέων μαθηματικών στα πανεπιστημιακά προγράμματα, πιο αφηρημένων στο περιεχόμενο και πιο αυστηρών στην παρουσίαση.
v) Η τεχνολογική έκρηξη της μεταπολεμικής εποχής, η οποία λειτούργησε ως μια πρωτοφανής δύναμη προόδου και ανάπτυξης.

Θα πρέπει, τέλος, να αναφέρουμε ότι, κατά γενική ομολογία, το κύριο, καθοριστικό ερέθισμα (όχι βέβαια αίτιο) για να εκδηλωθεί αυτή η μεταρρύθμιση πρώτα στις ΗΠΑ και αργότερα φυσικά σε παγκόσμιο επίπεδο, ήταν η εκτόξευση από τους Σοβιετικούς του δορυφόρου Sputnik I, το Νοέμβριο του 1957. Το γεγονός αυτό τάραξε κυριολεκτικά τη μακαριότητα των Αμερικανών που πίστευαν μέχρι εκείνη τη στιγμή ότι είχαν το προβάδισμα και την υπεροχή στον τεχνολογικό τομέα. Αμέσως άρχισαν να ξοδεύονται εκατομμύρια δολάρια από τον κρατικό προϋπολογισμό για τη βελτίωση της εκπαίδευσης και κυρίως για το σχεδιασμό μαθηματικών προγραμμάτων που θα απευθύνονταν στους ταλαντούχους κυρίως μαθητές, στα μελλοντικά τεχνολογικά στελέχη (Griffiths και Howson 1974, p. 138). Τα βασικότερα χαρακτηριστικά των μεταρρυθμίσεων αυτών έχουν σχέση με το περιεχόμενο και τη διδακτική μεθοδολογία του μαθήματος και περιγράφονται αναλυτικά σε άλλη εργασία μου (Τουμάσης 1989). Στην εργασία αυτή αναλύονται και ερμηνεύονται κριτικά οι επιπτώσεις που είχαν οι αλλαγές αυτές της κίνησης των «μοντέρνων» μαθηματικών στη μαθηματική εκπαίδευση της χώρας μας. Ειδικότερα, στην εργασία αυτή γίνεται μια εκτεταμένη παρουσίαση και ανάλυση των αλλαγών στη Δευτεροβάθμια μαθηματική μας εκπαίδευση από τις αρχές της δεκαετίας του '60 μέχρι σήμερα.

* Εδώ αναφέρονται επιγραμματικά μόνο τα σημαντικότερα αίτια χωρίς να αναλύονται. Για περισσότερες πληροφορίες, όπως και για μια εμπεριστατωμένη ανάλυση αυτών των αιτίων, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει σε σχετική μου μελέτη (Τουμάσης 1989, σ. 39)

Το τρίτο κύμα ή η κίνηση «πίσω στα βασικά» (back to the basics) άρχισε να εκδηλώνεται σε πολλές χώρες από τα μέσα περίπου της δεκαετίας του '70, ως αντίδραση για την αποτυχία της προηγούμενης κίνησης «των μοντέρνων μαθηματικών». Τα μοντέρνα μαθηματικά θεωρήθηκαν υπεύθυνα για την πτώση των επιδόσεων των μαθητών στα τεστ σε εθνικούς και παγκόσμιους οργανισμούς. Άρχισε λοιπόν να διαμορφώνεται μια τάση απομάκρυνσης από τα νέα προγράμματα της δεκαετίας του '60, που εκδηλώθηκε ως κίνηση «πίσω στα βασικά» και είχε ως κύρια χαρακτηριστικά τα παρακάτω:

i) Εγκατάλειψη της συνολοθεωρητικής γλώσσας στο μεγαλύτερο μέρος της παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών.
ii) Μεγαλύτερη έμφαση στις υπολογιστικές δεξιότητες και τεχνικές, αφού θεωρήθηκε ότι είχαν εγκαταλειφθεί με τον υπερτονισμό της κατανόησης στα «μοντέρνα» μαθηματικά.
iii) Στροφή προς τους μηχεβιοριστικούς στόχους στη διδασκαλία των μαθηματικών, σε αντίθεση με τους ασαφείς, χαλαρούς στόχους της ανακαλυπτικής διαδικασίας (Usiskin 1985).
iv) Στροφή προς τις μεγάλες μάζες των μαθητών που είχαν παραμεληθεί από τις προηγούμενες μεταρρυθμίσεις.

Η κίνηση αυτή, ενώ σε μερικές περιπτώσεις έδωσε θετικά αποτελέσματα ή πήγαζε τουλάχιστον από σωστές προθέσεις, ορισμένες φορές εκδηλώθηκε σαν μια υστερία ενάντια στα «μοντέρνα» μαθηματικά με αποτέλεσμα να φθάσει στο άλλο αντίθετο άκρο, λειτουργώντας σαν ο αντίποδας των «μοντέρνων» μαθηματικών. Στην περίπτωση αυτή επικρίθηκε ως αποπροσανατολιστική και επικίνδυνη, αφού υποδείκνυε μια επιστροφή στη μηχανική και τυποποιημένη μάθηση, μέσω της εξάσκησης στις υπολογιστικές δεξιότητες και «συνεπαγόταν τη μετακίνηση του εκπαιδευτικού εκκρεμούς στο περιεχόμενο και τις μεθόδους μιας ξεπερασμένης εποχής» (House 1982, p. 25).

Το τέταρτο κύμα των μεταρρυθμίσεων ξεκίνησε τη δεκαετία του '80 από τις ΗΠΑ πάλι και βρίσκεται ακόμη σε εξέλιξη. Η προηγούμενη κίνηση «πίσω στα βασικά», παρ' όλες τις διακηρύξεις για μαθηματική εκπαίδευση που θα απευθυνόταν στις ευρύτερες μάζες, όχι μόνο δεν κατάφερε να επιτύχει τους στόχους της, αλλά παρατηρήθηκε και πτώση της επίδοσης των μαθητών σε δεξιότητες κυρίως επίλυσης προβλήματος (Mcknight et al. 1985). Οι ειδικοί της μαθηματικής εκπαίδευσης απέδωσαν με απλοϊκό τρόπο (Τουμάσης 1989, σ. 56) την αποτυχία αυτή στην προηγούμενη μεταρρυθμιστική κίνηση, κατηγορώντας την ότι απλοποίησε σε ανησυχητικό βαθμό τα μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης με την υποβάθμιση της παραγωγικής προσέγγισης και των διανοητικών δεξιοτήτων ανώτερου επιπέδου. Οι βασικές κατευθύνσεις της τελευταίας μεταρρύθμισης φαίνονται στις συστάσεις που κάνει η Εθνική Ένωση Μαθηματικών Δασκάλων των ΗΠΑ (N.C.T.M.) για τα σχολικά μαθηματικά τη δεκαετία του 1980, μεταξύ των οποίων είναι (N.C.T.M. 1980):

i) Η επίλυση προβλημάτων πρέπει να αποτελέσει το επίκεντρο των σχολικών μαθηματικών για τη δεκαετία του '80.
ii) Πρέπει να καθοριστεί μια βασική διαβάθμιση των ικανοτήτων και δεξιοτήτων που απαιτούνται από τη διδασκαλία των μαθηματικών, η οποία να συμπεριλαμβάνει πολύ περισσότερα επίπεδα πέρα των απλών υπολογιστικών δεξιοτήτων.
iii) Τα μαθηματικά προγράμματα πρέπει να λάβουν υπόψη τους τις πλήρεις δυνατότητες που προσφέρουν οι υπολογιστές τσέπης και οι μικροϋπολογιστές σε όλες τις σχολικές βαθμίδες.
iv) Περισσότερη μαθηματική μελέτη πρέπει να απαιτηθεί απ' όλους τους μαθητές, ενώ παράλληλα ένα ευλύγιστο πρόγραμμα με μεγαλύτερη δυνατότητα επιλογών πρέπει να σχεδιαστεί για να εκπληρώσει τις ανάγκες του μαθητικού πληθυσμού.

Παρατηρούμε, δηλαδή, μια έμφαση στις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος (problem solving), που οπωσδήποτε καλλιεργούν τις διανοητικές δεξιότητες ανώτερης τάξης, καθώς επίσης και στην αξιοποίηση της τεχνολογίας του ηλεκτρονικού υπολογιστή για τη διδακτική πράξη.

## 3.4 Συμπεράσματα

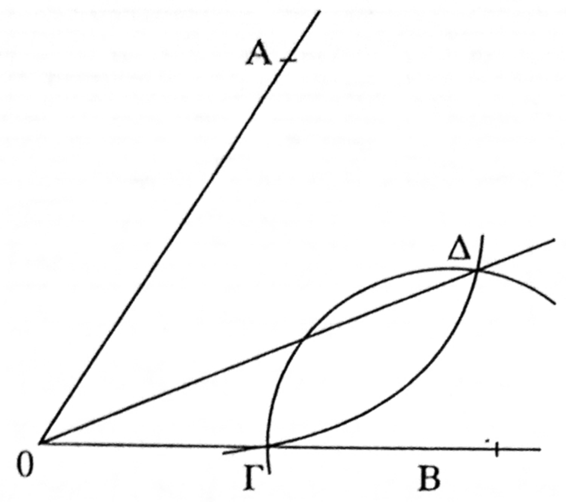
Το βασικότερο συμπέρασμα που θα μπορούσε, νομίζουμε, να βγάλει κανείς από την παραπάνω σύντομη περιγραφή της ιστορικής εξέλιξης της μαθηματικής εκπαίδευσης, είναι ότι η διαμόρφωση του περιεχομένου, της μορφής και της διδακτικής μεθοδολογίας των σχολικών μαθηματικών σε κάθε εποχή, ήταν αντανάκλαση των ιδιαίτερων κοινωνικών - οικονομικών - πολιτικών - πολιτισμικών - παιδαγωγικών και επιστημονικών συνθηκών, που τη χαρακτήριζαν κάθε φορά. Οι αλλαγές και οι μεταρρυθμίσεις στα σχολικά μαθηματικά προήλθαν κάθε φορά από δύο βασικές κατευθύνσεις. Από τις διεργασίες και εξελίξεις στη μαθηματική επιστήμη, αυτή καθ' εαυτή, και από τις κοινωνικές ανάγκες και απαιτήσεις για οικονομική και τεχνολογική ανάπτυξη. Αν θα πρέπει να μείνει κάτι απ' αυτή την ιστορική επισκόπηση, αυτό, κατά τη γνώμη μας, πρέπει να είναι η αναγνώριση και συνειδητοποίηση των πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων και αλληλοσυσχετίσεων στα βασικά συστατικά που προσδιορίζουν και συνθέτουν μια εκπαιδευτική πραγματικότητα, όσον αφορά στο μάθημα των μαθηματικών, και η κατανόηση του καθοριστικού αποφασιστικού ρόλου που αυτές ακριβώς θα μπορούσαν να παίξουν για την αποτελεσματικότητά της.

Ελπίζουμε ότι αυτή η επισκόπηση μπορεί να ενεργοποιήσει τη σκέψη του αναγνώστη και να τον ευαισθητοποιήσει στη διαπίστωση ότι πάντοτε θα υπάρχει ένα αδιάκοπο πρόβλημα προσαρμογής των μαθηματικών προγραμμάτων και των διδακτικών μεθόδων στις μεταβαλλόμενες αντιλήψεις και φιλοσοφίες γύρω από τη φύση των μαθηματικών, καθώς επίσης και στις πρακτικές ανάγκες της κοινωνίας. Οι αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση, όπως εξάλλου και σ' οποιαδήποτε εκπαιδευτική πραγματικότητα, δεν έρχονται επειδή τις θέλουν ή τις οραματίστηκαν τρεις - τέσσερις εμπνευσμένοι άνθρωποι. Οι πραγματικές αλλαγές ή θα είναι προϊόν αδήριτης κοινωνικής ανάγκης, η οποία θα προέρχεται από κοινωνικο-οικονομικές και πολιτικές ανακατατάξεις ή θα είναι απλώς σαπουνόπερες.

4ω

**12.** Πόσο καλή προσέγγιση μας δίνει η παρακάτω εμπειρική μέθοδος τριχοτόμησης μιας οξείας γωνίας με κανόνα και διαβήτη;

Θεωρούμε την οξεία γωνία $A\hat{O}B$ (Σχήμα 1) με ΟΑ = ΟΒ και έστω Γ το μέσο του ΟΒ. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΓ φέρνουμε ένα τόξο κύκλου. Με κέντρο Β και ακτίνα ΒΓ φέρνουμε ένα άλλο τόξο το οποίο τέμνει το προηγούμενο στο Δ. Η ΟΔ τριχοτομεί τη γωνία $A\hat{O}B$.




*Σχήμα 1*

**13.** Επινοήσατε μια εμπειρική μέθοδο, χρησιμοποιώντας έναν ορθό κώνο, έναν ορθό κύλινδρο της ίδιας ακτίνας και του ίδιου ύψους και λίγη άμμο, για να δείξετε ότι ο όγκος ενός ορθού κώνου είναι το ένα τρίτο του γινομένου του ύψους του επί το εμβαδόν της βάσεώς του.

**14.** Έχει ανακαλυφθεί μια Βαβυλωνιακή πλάκα η οποία δίνει τις τιμές της παράστασης $\nu^3+\nu^2$ για $\nu = 1$ έως 30. Φτιάξετε έναν τέτοιο πίνακα για $\nu = 1$ έως $\nu = 10$ και χρησιμοποιήστε τον για να βρείτε μια ρίζα της εξίσωσης $x^3+2x^2-3136 = 0$.

**15.** Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι χρησιμοποιούσαν τον τύπο $E = \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)}{4}$ για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τυχαίου τετραπλεύρου, του οποίου οι διαδοχικές πλευρές είχαν μήκος, α, β, γ, δ. Εξετάσετε εάν ο τύπος αυτός δίνει στην πραγματικότητα μεγαλύτερο ή μικρότερο εμβαδόν από το πραγματικό.

**16.** Οι πυθαγόρειες τριάδες είναι συστήματα τριών ακέραιων αριθμών (α, β, γ), για τους οποίους ισχύει η ισότητα $\alpha^2+\beta^2 = \gamma^2$, π.χ. (5, 12, 13).

Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω τύποι μάς δίνουν πυθαγόρειες τριάδες:

*α)* $\alpha = \kappa, \quad \beta = \dfrac{\kappa^2-1}{2}, \quad \gamma = \dfrac{\kappa^2+1}{2}$, όπου κ περιττός φυσικός αριθμός.

*β)* $\alpha = \kappa^2 - \lambda^2, \quad \beta = 2\kappa\lambda, \quad \gamma = \kappa^2 + \lambda^2$, όπου κ, λ, ακέραιοι.

*γ)* $\alpha = 2\nu+1, \quad \beta = 2\nu^2+2\nu, \quad \gamma = 2\nu^2+2\nu+1$, όπου ν φυσικός αριθμός.

Ποιος τύπος είναι πιο γενικός;

**17.** Θεωρούμε κύκλο κέντρου Ο, την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ και τη διχοτόμο της ΟΓ. Κατασκευάζουμε τον κλάδο της υπερβολής με εκκεντρότητα 2 η οποία έχει το Α ως εστία και αντίστοιχη διευθετούσα την ΟΓ. Εάν Δ το σημείο τομής του κλάδου αυτού με τον κύκλο, να δείξετε ότι $A\hat{O}\Delta = \dfrac{1}{3} A\hat{O}B$.
[Η τριχοτόμηση αυτή αναφέρεται από τον Πάππο (320 μ.Χ.)].